Über Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen.

Habilitationsschrift
zur
Erlangung der Venia docendi
der
hohen philosophischen Fakultät
der
Kgl. Bayr. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen
vorgelegt
von

Dr. phil. Emil Hilb
aus Augsburg

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1908.

Alexander Ziwet

69

Über Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen.

Habilitationsschrift

zur

Erlangung der Venia docendi

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Kgl. Bayr. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen

vorgelegt

von

Dr. phil. Emil Hilb

aus Augsburg.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1908.

In der letzten Zeit hat das Problem der Darstellung willkürlicher Funktionen durch in Fourierscher Weise gebildete Reihen die Aufmerksamkeit auf sich gezogen und ist in mannigfacher Weise gelöst worden; es sei hier nur an die grundlegenden Arbeiten von Herrn D. Hilbert in den Göttinger Nachrichten seit 1904 und an die Inauguraldissertation von Herrn Erhard Schmidt (Göttingen 1905)*) erinnert. In diesen Resultaten sind alle bisher bekannten Entwicklungen, wie die nach trigonometrischen Funktionen, nach Besselschen, Sturmschen, Kugel- und Laméschen Funktionen, ferner aber auch nach den von Herrn Poincaré entdeckten, von den Herren Le Roy, Stekloff, Zaremba, Korn u. a. weiter untersuchten Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda u = 0$ als Spezialfälle enthalten, indem die Frage nach der Existenz der sogenannten „Normalfunktionen“ bei gewöhnlichen**) und partiellen linearen Differentialgleichungen sowie die Frage nach der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach ihnen auf die Untersuchung der Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(st)\,\varphi(t)\,dt$$

zurückgeführt wird. $K(st)$ ist der sogenannte Kern, eine in s und t symmetrische Funktion und soll der Bedingung genügen, daß

$$\int_a^b \int_a^b (K(st))^2\,ds\,dt$$

einen endlichen Wert besitzt.

$K(st)$ wird durch die Greensche Funktion der als Ausgangspunkt dienenden Differentialgleichung dargestellt.

Die Normal- oder Eigenfunktionen ergeben sich dann als Lösungen der homogenen Integralgleichung:

*) Abgedruckt in Math. Ann. Bd. 63.

**) Vergl. auch A. Kneser, Math. Ann. Bd. 63, S. 477 u. f.

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt,$$

welche nur dann eine Lösung besitzt, wenn λ ein Eigenwert ist. Die Eigenwerte λ liegen isoliert und können sich nur im Unendlichen häufen. Es gilt dann der Satz, daß jede Funktion $f(s)$, die sich vermittelst einer stetigen Funktion $h(s)$ in der Form

$$f(s) = \int_a^b K(st)\, h(t)\, dt$$

darstellen läßt, nach den zu $K(st)$ gehörigen Eigenfunktionen entwickelbar ist.

Es kann aber eintreten, daß $\int_a^b \int_a^b (K(st))^2\, ds\, dt$ einen unendlich großen Wert hat. Dieses ist z. B. dann der Fall, wenn man eine Differentialgleichung als Ausgangspunkt nimmt und das Intervall, für welches Normalfunktionen postuliert sind, sich bis zu geeigneten singulären Stellen erstrecken läßt. Der einfachste solche Fall ergibt sich, wenn man von der Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0$ ausgeht und das Intervall, in dessen Endpunkten die Normalfunktionen verschwinden sollen, in das Unendliche wachsen läßt. Hierbei häufen sich die Eigenwerte auf der ganzen positiven Hälfte der λ-Achse überall dicht an, die Eigenwerte bilden ein kontinuierliches Spektrum oder ein Streckenspektrum, ein Ausdruck, der von Herrn Hilbert*) in seiner Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen eingeführt wurde. Statt der Reihenentwicklungen erhält man daher bekanntlich das Fouriersche Integraltheorem. Mit Ausnahme der Integraldarstellungen vermittelst Besselscher Funktionen und Kegelfunktionen ist nun die Verallgemeinerung des Fourierschen Integraltheorems, wie sie der oben erwähnten Verallgemeinerung der Fourierschen Reihen entspricht, bis jetzt nicht näher durchgeführt. (Die hochinteressanten Untersuchungen von Hamilton**) stellen auch eine Verallgemeinerung des Fourierschen Integraltheorems dar, jedoch nach einer anderen Richtung hin, und kommen so hier nicht direkt in Betracht.) Es sind z. B. die Integraldarstellungen, welche sich aus den allgemeinen Reihenentwicklungen der Potentialtheorie ergeben, wenn sich ein Intervall bis an zwei zusammengefallene singuläre Punkte erstreckt, nicht näher untersucht, wenn wir von einigen Bemerkungen von Herrn Bôcher***) absehen.

*) D. Hilbert, Göttinger Nachrichten 1906, 4. Mitteilung S. 172.

**) Hamilton, On fluctuating fonctions. Trans. of Irish Ac. 19, 1842.

***) M. Bôcher, Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Leipzig 1894, S. 227.

Die Art der Darstellung von willkürlichen Funktionen durch die Normalfunktionen einer Differentialgleichung mit einem singulären Punkte am Ende des Intervalls ist nun eine sehr mannigfaltige. Neben einem kontinuierlichen Spektrum kann noch, wie wir sehen werden, ein Punktspektrum auftreten; wir erhalten dadurch eine gemischte Darstellung, teils durch eine in Fourierscher Weise gebildete Reihe, teils durch ein Integral, analog der Fourierschen Integraldarstellung. Es kann aber auch vorkommen, daß man eine Integraldarstellung erhält, bei welcher das Integral nach den Eigenwerten über getrennte Intervalle zu nehmen ist; die Eigenwerte bilden eine unendliche Folge getrennter Streckenspektren. Herr Wirtinger*) kam im Falle der schwingenden Saite bei Ausdehnung des Intervalles in das Unendliche zuerst auf die Existenz einer solchen Verteilung der Eigenwerte, welche sich nur längs gewisser Strecken anhäufen; er nannte diese Verteilung „Bandenspektrum". Allein es findet sich bei Herrn Wirtinger keine weitere Durchführung bezüglich der Darstellung willkürlicher Funktionen, „da der Durchführung der Grenzübergänge sich mannigfaltige Schwierigkeiten entgegenstellen", von denen die wesentlichste eben im Auftreten des Bandenspektrums besteht. Jedoch ist schon die Aufdeckung der Existenz eines Bandenspektrums im Jahre 1897 äußerst bemerkenswert. Erst durch die grundlegende Arbeit von Herrn Hilbert**) über die Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen ist ein Mittel geschaffen worden, das alle bis jetzt erwähnten Probleme behandeln läßt.

Es soll nun die Aufgabe der folgenden Abhandlung sein, die Darstellungen willkürlicher Funktionen durch Eigenfunktionen von Differentialgleichungen mit singulären Punkten vermittelst der eben zitierten Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen zu behandeln. Als Bindeglied benutzen wir nach wie vor die Integralgleichungen, bei denen der Kern $K(st)$ aber nicht mehr die Eigenschaft hat, daß $\int\limits_a^b \int\limits_a^b (K(st))^2 ds\, dt$ endlich ist, was eine wesentliche Voraussetzung für die am Anfang erwähnten Methoden der Integralgleichungen war. Dagegen wird eine geringe Modifikation der Hilbertschen Methode, die er in seiner 4. und 5. Mitteilung***) niedergelegt hat, zum Ziele führen und uns gleichzeitig gestatten, gewisse Integralgleichungen zu behandeln, welche bis jetzt unzugänglich waren; jedoch gedenke ich, diesen letzten

*) Mathematische Annalen 48, S. 387.

**) Göttinger Nachrichten 1906, 4. Mitt. S. 157—227. 5. Mitt. S. 439—480.

***) Wir werden diese beiden Arbeiten in der Folge unter H. 4 bez. H. 5 zitieren.

Punkt erst in einer folgenden Abhandlung ausführlicher zu behandeln und nur beim einfachsten Falle, der sich an das Fouriersche Integraltheorem anschließt, aber typisch ist, wirklich durchzuführen. Das Hauptaugenmerk soll auf die Darstellung willkürlicher Funktionen gerichtet sein.

Was nun die Benützung der quadratischen Formen betrifft, so werden die wichtigsten Tatsachen dieser Theorie nachher zusammengestellt werden. Eine wesentliche Abweichung von der Hilbertschen Theorie wird nur daraus entspringen, daß die quadratischen Formen unendlich vieler Variablen hier nicht nur als Grenzfall von quadratischen Formen mit endlich vielen Variablen sich ergeben, sondern als Grenzfall von, dem Problem angepaßten, sogenannten stetigen quadratischen Formen unendlich vieler Veränderlicher aufgefaßt werden, die nach den quadratischen Formen mit endlich vielen Veränderlichen die einfachsten sind. Demzufolge werden im folgenden auch nur diejenigen Resultate der 4. Hilbertschen Note benutzt, welche sich auf vollstetige Formen und die allgemeine Theorie der orthogonalen Transformation unendlich vieler Variabeln beziehen.

In Kap. I wird nun ausführlich von diesem Standpunkte aus das Fouriersche Integraltheorem entwickelt und gleichzeitig die allgemein zu benützende Methode auseinandergesetzt. Kap. II behandelt einen etwas allgemeineren Fall, welcher auf eine gemischte Darstellung durch Reihe und Integral führt, die der Verallgemeinerung der sogenannten Sturmschen Entwicklungen entspricht. In Kap. III ist dann das von Wirtinger aufgestellte Problem durchgeführt, in Kap. IV die oben erwähnten Darstellungen, die sich an die Potentialtheorie anschließen. Die Darstellungen willkürlicher Funktionen, wie sie sich aus den Kap. II, III, IV ergeben, sind meines Wissens bisher nicht einmal nur formal angegeben.

Kapitel I.

Das Fouriersche Integraltheorem.

§ 1.

Aufstellung der Integralgleichung.

Um das Fouriersche Integraltheorem zu erhalten, müssen wir von derselben Methode ausgehen, welche zur Ableitung der Fourierschen Reihenentwicklung vermittelst der Theorie der quadratischen Formen dient; jedoch müssen bei diesen Betrachtungen zur Ermöglichung des Überganges zur Integraldarstellung einige Modifikationen getroffen werden,

deren Notwendigkeit sich erst später ergeben wird. Wir gehen also darauf aus, die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1)\qquad \frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} + (\lambda - 1) u_1(x) = 0$$

zu bestimmen, welche für $x = 0$ und $x = l$ verschwinden; diese Lösungen nennt man Eigenfunktionen, die dazugehörigen Werte λ Eigenwerte; es ist dann die Möglichkeit der Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach diesen Eigenfunktionen zu untersuchen und zu sehen, was aus den Eigenfunktionen und der Entwicklung wird, wenn l unendlich große Werte annimmt, und gerade dabei wird uns die Theorie der quadratischen Formen wesentliche Dienste leisten. Um die für $l = \infty$ auftretende Singularität der Behandlung zugänglich zu machen, transformieren wir (1) vermittelst der Substitution: $x = |\lg s|$ in

$$(2)\qquad \frac{d}{ds}\left(s \frac{du(s)}{ds}\right) + \frac{(\lambda - 1)}{s} u(s) = 0,$$

wobei dann $u(s)$ für $s = e^{-l} = \varepsilon$ und für $s = 1$ verschwinden muß.

Den Übergang zu der Integralgleichung und der Theorie der quadratischen Formen vermittelt bekanntlich die Greensche Funktion*) $G_\varepsilon(st)$, die in s und t symmetrisch ist, für $s = \varepsilon$ und $s = 1$ bei beliebigem t verschwindet, deren 1. Ableitung für $s = t$ eine Unstetigkeit besitzt, definiert durch

$$(3)\qquad \lim_{\delta = 0}\left[\frac{d}{ds} G_\varepsilon(s\,t)\right]_{s = t + \delta} - \lim_{\delta = 0}\left[\frac{d}{ds} G_\varepsilon(s\,t)\right]_{s = t - \delta} = -\frac{1}{t}$$

und die der Differentialgleichung genügt:

$$(4)\qquad \frac{d}{ds} s \frac{d}{ds} v(s) - \frac{v(s)}{s} = 0 \cdot$$

Man findet durch leichte Rechnung:

$$(5)\quad G_\varepsilon(st) = \frac{\left(\frac{1}{s} - s\right)\left(t - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)}{2(1 - \varepsilon^2)} \text{ für } s > t;\quad G_\varepsilon(st) = \frac{\left(\frac{1}{t} - t\right)\left(s - \frac{\varepsilon^2}{s}\right)}{2(1 - \varepsilon^2)} \text{ für } s < t.$$

Sei nun allgemein: $L_s(u) = \frac{d}{ds} p \frac{du}{ds} + qu$, so gilt bekanntlich die Greensche Formel

$$(6)\qquad \int_a^b [v L_t(u) - u L_t(v)]\, dt = \left[p\left(v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt}\right)\right]_a^b,$$

wenn u und v stetige 1. und 2. Ableitungen besitzen. Wir wählen nun für $L_s(u)$ die linke Seite der Differentialgleichung (4), für u eine Eigen-

*) Hilbert, 2. Mitt., Göttinger Nachrichten 1904, S. 217.

funktion $\psi_\varepsilon(s)$ von (2), die in ε und 1 verschwindet, für v aber $G_\varepsilon(st)$; dann findet man unter Berücksichtigung der durch (3) definierten Unstetigkeit:

$$\psi_\varepsilon(s) - \lambda \int_\varepsilon^1 G_\varepsilon(st)\,\psi_\varepsilon(t)\,\frac{dt}{t} = 0 \tag{7}$$

und diese Integralgleichung definiert die Eigenfunktionen $\psi_\varepsilon(s)$, da sie nur für Eigenwerte λ eine Lösung zuläßt. Der Kern $\frac{G_\varepsilon(st)}{t}$ ist noch nicht symmetrisch; um ihn symmetrisch zu machen, setzen wir

$$\varphi_\varepsilon(s) = \frac{\psi_\varepsilon(s)}{\sqrt{s}} \quad \text{für } s \geqq \varepsilon;\ \varphi_\varepsilon(s) = 0 \ \text{ für } 0 \leqq s \leqq \varepsilon, \tag{8}$$

$$\frac{G_\varepsilon(st)}{\sqrt{s}\,\sqrt{t}} = K_\varepsilon(st) = \frac{\left(\frac{1}{s} - s\right)\left(t - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)}{2\sqrt{s}\,\sqrt{t}\,(1-\varepsilon^2)} \quad \text{für } s \geqq t, \tag{9}$$

$$\frac{G_\varepsilon(st)}{\sqrt{s}\,\sqrt{t}} = K_\varepsilon(st) = \frac{\left(\frac{1}{t} - t\right)\left(s - \frac{\varepsilon^2}{s}\right)}{2\sqrt{s}\,\sqrt{t}\,(1-\varepsilon^2)} \quad \text{für } s \leqq t;$$

$$K_\varepsilon(st) = 0, \quad \text{wenn } s \leqq \varepsilon \text{ oder } t \leqq \varepsilon;$$

dann ist $K_\varepsilon(st) = K_\varepsilon(ts)$ und man erhält als definitive Integralgleichung:

$$\varphi_\varepsilon(s) - \lambda \int_0^1 K_\varepsilon(st)\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt = 0. \tag{10}$$

Aus der definierenden Differentialgleichung (2) ersieht man, daß die Eigenwerte, für welche (10) allein lösbar ist,

$$\lambda_p^{(\varepsilon)} = 1 + \frac{p^2\pi^2}{|\lg \varepsilon|^2} \quad \text{für } p = 1, 2 \ldots \tag{11}$$

sind; die dazu gehörigen Eigenfunktionen sind:

$$\varphi_{p,\varepsilon}(s) = \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_p^{(\varepsilon)} - 1}\,|\lg s|\right)}{\sqrt{s}} \quad \text{für } s \geqq \varepsilon;\quad \varphi_{p,\varepsilon}(s) = 0 \quad \text{für } s \leqq \varepsilon. \tag{12}$$

Durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor entstehen daraus die normierten Eigenfunktionen $\bar{\varphi}_{p,\varepsilon}(s)$, für welche neben

$$\int_0^1 \bar{\varphi}_{p,\varepsilon}(s)\,\bar{\varphi}_{q,\varepsilon}(s)\,ds = 0 \ \text{ für } p \neq q$$

auch noch die Relationen gelten

$$\int_0^1 (\bar{\varphi}_{p,\varepsilon}(s))^2\,ds = 1.$$

Es ist also

(13) $$\bar{\varphi}_{p,\varepsilon}(s) = \frac{\varphi_{p,\varepsilon}(s)}{\sqrt{\int\limits_{\varepsilon}^{1}(\varphi_{p,\varepsilon}(s))^2\,ds}} = \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_p^{(\varepsilon)}-1}\;|\lg s|\right)}{\sqrt{s}\sqrt{\frac{|\lg\varepsilon|}{2}}},\quad \text{wenn } s \geqq \varepsilon;$$

$$\bar{\varphi}_{p,\varepsilon}(s) = 0,\quad \text{wenn } s \leqq \varepsilon.$$

Es sind nun die analogen Formeln für $\varepsilon = 0$ daraus abzuleiten. Aus $K_\varepsilon(st)$ wird für $\varepsilon = 0$

(14) $$K(st) = \frac{\left(\frac{1}{s}-s\right)t}{2\sqrt{s}\sqrt{t}} \quad \text{für } s > t;\quad K(st) = \frac{\left(\frac{1}{t}-t\right)s}{2\sqrt{s}\sqrt{t}} \quad \text{für } s \leqq t.$$

Wir wählen ferner p_ε derartig abhängig von ε, daß für irgend ein beliebig vorgegebenes μ

(15) $$\lim_{\varepsilon=0}\frac{p_\varepsilon}{|\lg\varepsilon|} = \mu;$$

dann ist

(16) $$\lim_{\varepsilon=0}\lambda_{p_\varepsilon}^{(\varepsilon)} = 1+\mu^2\pi^2 = \lambda_\mu;\quad \lim_{\varepsilon=0}\varphi_{p_\varepsilon,\varepsilon}(s) = \varphi_\mu(s) = \frac{\sin(\mu\pi\,|\lg s|)}{\sqrt{s}}.$$

Nun folgt aus (6) unter Berücksichtigung von (14), wenn $s \neq 0$,

(17) $$\lambda_\mu\int\limits_{\varepsilon}^{1}K(st)\,\varphi_\mu(t)\,dt = \varphi_\mu(s) - \left\{t\left[K(st)\sqrt{t}\frac{d}{dt}(\varphi_\mu(t)\sqrt{t}) - \varphi_\mu(t)\sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(K(st)\sqrt{t})\right]\right\}_{t=\varepsilon}.$$

Es genügt nämlich $K(st)\sqrt{s}\sqrt{t}$ der Gleichung (4), $\varphi_\mu(s)\sqrt{s}$ einer Gleichung von der Form (2). Da nun $\varphi_\mu(t)\sqrt{t}$ für alle reellen μ in der Umgebung von $t = 0$ endlich bleibt, so konvergiert

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}K(st)\,\varphi_\mu(t)\,dt$$

mit nach 0 abnehmendem ε gegen das wohlbestimmte Integral

$$\int\limits_{0}^{1}K(st)\,\varphi_\mu(t)\,dt,$$

wenn $s \neq 0$. Ebenso folgt unmittelbar

$$\lim_{\varepsilon=0}\left\{t\left[K(st)\sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(\varphi_\mu(t)\sqrt{t}) - \varphi_\mu(t)\sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(K(st)\sqrt{t})\right]\right\}_{t=\varepsilon} = 0;$$

daher ist:

(18) $$\varphi_\mu(s) - \lambda_\mu\int\limits_{0}^{1}K(st)\,\varphi_\mu(t)\,dt = 0.$$

Wir haben also den Satz:

Die homogene Integralgleichung (18), *welche zum Kerne $K(st)$ gehört, hat für alle Werte $\lambda_\mu > 1$ eine Lösung $\varphi_\mu(s)$, welche für $s = 1$ verschwindet, und welche, mit $\sqrt{s}$ multipliziert, in der Umgebung von $s = 0$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. $\varphi_\mu(s) \cdot \sqrt{s}$ genügt dann der Gleichung* (2) *für $\lambda = \lambda_\mu$, und die $\varphi_\mu(st) \cdot \sqrt{s}$ stellen diejenigen Lösungen von* (2) *dar, die für $s = 1$ verschwinden, für $s = 0$ unter einer endlichen Grenze bleiben.*

$\varphi_\mu(s)$ läßt sich dann nicht mehr so normieren, daß $\int_0^1 \varphi_\mu(s)^2 ds = 1$; vielmehr ist $\int_0^1 \varphi_\mu(s)^2 ds = \infty$.

§ 2.

Zusammenstellung einiger Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen.*)

Ehe wir jetzt die Theorie der quadratischen Formen auf die gewonnene Integralgleichung anwenden, stellen wir die wichtigsten Definitionen und Sätze der Hilbertschen Theorie der quadratischen Formen zusammen, wie sie in der 4. und 5. Mitteilung in den Göttinger Nachrichten 1906 aufgestellt sind.

Es sei

$$k_{pq} = k_{qp}; \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = (xx) \leqq 1; \quad (yy) \leqq 1; \quad K(xx) = \sum_{\substack{p=1\cdots\infty \\ q=1\cdots\infty}} k_{pq}\, x_p\, x_q;$$

$$K(xy) = \sum k_{pq}\, x_p\, y_q.$$

I. Die bilineare Form $K(xy)$ heißt beschränkt, wenn sie für alle x und y, die der Bedingung $(xx) \leqq 1$, $(yy) \leqq 1$ genügen, unter einer endlichen Grenze bleibt; dann ist natürlich auch die quadratische Form $K(xx)$ beschränkt, und umgekehrt, ist $K(xx)$ beschränkt, so ist es auch $K(xy)$ (H. 4 S. 176).

II. Unter der Faltung von zwei Linearformen

$$L(x) = \sum_i l_i x_i, \quad M(x) = \sum_i m_i x_i$$

versteht man

$$L(\cdot)\, M(\cdot) = \sum_i l_i m_i \quad \text{(H. 4 S. 159).}$$

Für Linearformen gelten dann folgende Tatsachen:

IIa. Es ist immer: $\left(\sum_i l_i x_i\right)^2 \leqq \sum_i l_i^2 \cdot \sum_i x_i^2$ (H. 4 S. 176).

---

*) Diese Sätze werden im folgenden immer mit den entsprechenden römischen Ziffern zitiert.

IIb. Ist stets $\sum\limits_i{}' l_i x_i \leqq M$, sobald $(xx) \leqq 1$, so ist $\sum\limits_i{}' l_i^2 \leqq M^2$.

IIc. Seien in $L(x) = \sum\limits_i{}' l_i (x_i(\xi))^2$ die $x_i(\xi)$ stetige Funktionen einer Variabeln ξ, ferner $\sum\limits_i{}' (x_i(\xi))^2 \leqq M$ und $\sum\limits_i{}' l_i^2$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_i{}' l_i x_i(\xi)$ gleichmäßig (H. 5 S. 442).

III. $K_n(xy) = \sum\limits_{\substack{p=1\cdots n\\ q=1\cdots n}}{}' k_{pq} x_p y_q$ heißt der n^{te} Abschnitt von $K(xy)$.

Ist $K(xy)$ eine beschränkte Form, so konvergiert $K_n(xy)$ bei festen x und y gegen $K(xy)$ mit wachsendem n, wenn $(xx) \leqq 1$, $(yy) \leqq 1$; d. h. es ist

$$\lim_{n=\infty} K_n(xy) = K(xy) \quad \text{(H. 4 S. 177).}$$

Diese Limesgleichung gilt gleichmäßig für solche Veränderliche x und y, für welche $\sum{}' x_i^2$ und $\sum{}' y_i^2$ gleichmäßig konvergieren. Und aus dem l. c. gegebenen Beweise folgt unmittelbar:

IV. Es sei $K_\varepsilon(xy) < M$ für alle $\varepsilon > 0$, wenn $(xx) \leqq 1$, $(yy) \leqq 1$; ferner sei für jedes endliche n: $\lim\limits_{\varepsilon=0} K_{\varepsilon,n}(xy) = K_n(xy)$, dann ist

$$\lim_{\varepsilon=0} K_\varepsilon(xy) = K(xy)$$

und $K(xy)$ eine beschränkte Form.

V. Resolvente heißt eine quadratische Form $\mathsf{K}(\lambda; xy)$, welche mit der beschränkten Form $K(xy)$ durch die Gleichung verbunden ist:

$$\mathsf{K}(\lambda; xy) - \lambda K(x\cdot)\, \mathsf{K}(\lambda; \cdot y) = (xy).$$

VI. Wenn $\sum\limits_{p,q}{}' k_{pq}^2$ konvergiert, ist $K(xy)$ eine beschränkte stetige (vollstetige) Form (H. 4 S. 203).

Für beschränkte stetige Formen gelten folgende Sätze:

VII. Die Lösung der Gleichung:

$$\lambda_p \overline{L}_p(\cdot)\, K(\cdot y) = \overline{L}_p(y)$$

durch eine beschränkte Linearform $\overline{L}_p(x)$ ist, wenn $K(xx)$ eine stetige quadratische Form ist, nur für ganz bestimmte Werte λ_p möglich. Diese λ_p, welche sich nur im Unendlichen häufen können, heißen Eigenwerte, die $\overline{L}_p(x)$ Eigenformen. Man kann die Eigenformen immer so normiert annehmen, daß

$$\overline{L}_p(\cdot)\, \overline{L}_q(\cdot) = 0, \quad \text{wenn } q \neq p,$$
$$\overline{L}_p(\cdot)\, \overline{L}_p(\cdot) = 1$$

ist (H. 4 S. 201).

VIII. Wenn $K(xy)$ vollstetig ist, und $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ ihre sämtlichen (sich höchstens im Unendlichen häufenden) Eigenwerte, $\bar{L}_p(x)$ die dazugehörigen Eigenfunktionen sind, so hat man:

$$K(xx) = \sum_p \frac{(\bar{L}_p(x))^2}{\lambda_p}.$$

Es existiert dann für alle λ außerhalb des von den Eigenwerten gebildeten „Spektrums" eine beschränkte eindeutig definierte Resolvente:

$$\mathsf{K}(\lambda; xx) = \sum_{(p,\infty)} \frac{(\bar{L}_p(x))^2}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}},$$

und es ist

$$(xx) = \sum_{(p,\infty)} (\bar{L}_p(x))^2.$$

Unter den Eigenwerten λ_p kann auch der Wert ∞ einfach oder mehrfach vorkommen, woran durch das dem Summenzeichen angefügte ∞ erinnert wird (H. 4 S. 201).

Herr Hilbert behandelt in der 4. Mitteilung auch das analoge Problem für allgemeine beschränkte Formen. Wir werden jedoch im folgenden die darauf bezüglichen Resultate nicht zu benützen brauchen, sondern sie werden sich in den von uns betrachteten Spezialfällen aus unseren Untersuchungen von selbst mitergeben, indem wir die allgemeine beschränkte Form als Grenzfall von vollstetigen Formen betrachten. Zum Vergleich seien jedoch die Formeln von Hilbert hier gegeben.

Wenn $K(xy)$ eine beschränkte, aber nicht mehr vollstetige Form ist, so tritt im allgemeinen neben den Eigenwerten λ_p, dem Punktspektrum, noch ein Streckenspektrum s auf, zu dem die beschränkte Form $\sigma(\lambda; xx)$, die „Spektralform", gehört, und man hat:

$$K(xx) = \sum_p \frac{(\bar{L}_p(x))^2}{\lambda_p} + \int_s \frac{d\sigma(\mu; xx)}{\mu},$$

$$\mathsf{K}(\lambda; xx) = \sum_{(p,\infty)} \frac{(\bar{L}_p(x))^2}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_s \frac{d\sigma(\mu; xx)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}},$$

$$(xx) = \sum_{(p,\infty)} (\bar{L}_p(x))^2 + \int_s d\sigma(\mu; xx).$$

Die λ_p können in diesem Falle auch im Endlichen Häufungsstellen besitzen.

§ 3.

Bildung der quadratischen Form.

Um von einer Integralgleichung zu der quadratischen Form überzugehen, benutzt Herr Hilbert (H. 5 S. 452) irgend ein sogenanntes vollständiges orthogonales Funktionensystem; wir bedienen uns des Systems

$$\sqrt{2}\sin(\pi s);\ \sqrt{2}\sin(2\pi s);\ \cdots.$$

Seien dann $u(s)$ und $v(s)$ im allgemeinen stetig und sowohl $\int_0^1 (u(s))^2 ds$ als auch $\int_0^1 (v(s))^2 ds$ endlich, so ist*):

$$(19)\quad \int_0^1 u(s)\,v(s)\,ds = \sum_{p=1}^{\infty}\int_0^1 u(s)\sqrt{2}\sin(p\pi s)\,ds\cdot\int_0^1 v(s)\cdot\sqrt{2}\sin(p\pi s)\,ds.$$

Man setzt alsdann:

$$(20)\quad \int_0^1 K_\varepsilon(s\,t)\sqrt{2}\sin(p\pi t)\,dt = k_p^{(\varepsilon)}(s);\quad \int_0^1 k_p(s)\sqrt{2}\sin(q\pi s)\,ds = k_{pq}^{(\varepsilon)},$$

$$(21)\quad K_\varepsilon(x\,y) = \sum_{p,q} k_{pq}^{(\varepsilon)}\,x_p\,y_q\,.$$

Wenn dann ε von 0 verschieden ist, so folgt durch zweimalige Anwendung von (19):

$$\sum_{p,q}\left(k_{pq}^{(\varepsilon)}\right)^2 = \int_0^1\!\!\int_0^1 (K_\varepsilon(st))^2\,ds\,dt,$$

also hat die Summe einen endlichen Wert und $K_\varepsilon(x\,y)$ ist vollstetig.

Dann ist aber nach VIII:

$$(22)\quad K_\varepsilon(xx) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left(\overline{L}_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{\lambda_p^{(\varepsilon)}}$$

und aus der Hilbertschen 5. Mitteilung l. c. folgt, daß die endlichen Eigenwerte $\lambda_p^{(\varepsilon)}$ von $K_\varepsilon(xx)$ mit den Eigenwerten $\lambda_p^{(\varepsilon)}$ der Integralgleichung (10) zusammenfallen; daß ferner die zu $\lambda_p^{(\varepsilon)}$ gehörige Linearform

$$\overline{L}_p^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{l}_i^{p,\varepsilon}\,x_i$$

mit den in (13) definierten $\overline{\varphi}_{p,\varepsilon}(s)$ durch die Relation verbunden ist:

$$(23)\quad \overline{l}_i^{p,\varepsilon} = \int_0^1 \sqrt{2}\,\overline{\varphi}_{p,\varepsilon}(s)\sin(i\pi s)\,ds = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}\,\varphi_{p,\varepsilon}(s)\sin(i\pi s)\,ds}{\sqrt{\frac{|\lg\varepsilon|}{2}}} = l_i^{p,\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\frac{|\lg\varepsilon|}{2}}}\,.\text{**})$$

*) A. Hurwitz, Mathematische Annalen, Bd. 57.

**) i ist hier natürlich nur eine ganze Zahl.

Setzen wir also

$$L_p^{(\varepsilon)}(x) = \sum_i l_i^{p,\varepsilon} x_i = \bar{L}_p^{(\varepsilon)}(x) \sqrt{\frac{|\lg \varepsilon|}{2}}, \tag{24}$$

so wird

$$K_\varepsilon(x x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon| \lambda_p^{(\varepsilon)}}. \tag{25}$$

Wir haben jetzt zu untersuchen, was aus der linken und rechten Seite von (25) wird, wenn ε nach 0 konvergiert. Wir zeigen zunächst, daß, wenn

$$\begin{aligned} k_p(s) &= \int_0^1 K(st)\sqrt{2}\sin(p\pi t)\,dt; \\ k_{pq} &= \int_0^1 k_p(s)\sqrt{2}\sin(q\pi s)\,ds = \int_0^1\int_0^1 K(st)\,2\sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\,ds\,dt \end{aligned} \tag{26}$$

ist,

$$\lim_{\varepsilon=0} K_\varepsilon(xy) = K(xy) = \sum_{p,q} k_{pq} x_p y_q \tag{27}$$

wird. Es ist nämlich der kleinste Eigenwert $\lambda_1^{(\varepsilon)}$ für jedes noch so kleine ε größer als 1 und der absolut kleinste Eigenwert einer (voll)stetigen quadratischen Form ist gleich dem reziproken Werte des Maximums von $K_\varepsilon(xx)$ unter der Nebenbedingung $(xx) \leqq 1$; also ist $|K_\varepsilon(xx)| \leqq 1$ für alle x, die der Bedingung $(xx) \leqq 1$ genügen. Ist auch $(yy) \leqq 1$, so findet man, indem man in $K_\varepsilon(xx)$ x durch $x + y$ ersetzt, daß auch $K(x\,y)$ für alle ε unter einer festen Zahl liegt.

Wir können daher nach IV auf (27) unmittelbar schließen, wenn wir noch zeigen, daß für beliebig großes, aber festes n:

$$\lim_{\varepsilon=0} K_{\varepsilon,n}(x\,y) = K_n(xy)$$

ist, oder daß man zu vorgegebenem δ ε so klein bestimmen kann, daß

$$\left| \sum_{\substack{p=1\cdots n \\ q=1\cdots n}} \left(k_{pq} - k_{pq}^{(\varepsilon)}\right) x_p y_q \right| \leqq \delta \tag{28}$$

wird. (28) ist aber sicher erfüllt, wenn wir erreichen können, daß

$$\left| k_{pq} - k_{pq}^{(\varepsilon)} \right| < \frac{\delta}{n^2}$$

wird. Aber eine leichte Integralabschätzung zeigt, daß wir dies tatsächlich erfüllen können, wenn ε nur klein genug ist, denn man hat ja

$$k_{pq}^{(\varepsilon)} = \int_{\varepsilon}^{1} dt \int_{\varepsilon}^{t} \frac{2\left(\frac{1}{t} - t\right)\left(s - \frac{\varepsilon^2}{s}\right)}{\sqrt{s}\sqrt{t}(1-\varepsilon^2)} \sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\, ds$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{1} dt \int_{t}^{1} \frac{2\left(\frac{1}{s} - s\right)\left(t - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)}{\sqrt{s}\sqrt{t}(1-\varepsilon^2)} \sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\, ds,$$

$$k_{pq} = \int_{0}^{1} dt \int_{0}^{t} \frac{2\left(\frac{1}{t} - t\right)s}{\sqrt{s}\sqrt{t}} \sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\, ds$$

$$+ \int_{0}^{1} dt \int_{t}^{1} \frac{2\left(\frac{1}{s} - s\right)t}{\sqrt{s}\sqrt{t}} \sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\, ds.$$

Damit ist also (27) bewiesen, und es folgt, daß $K(xy)$ eine beschränkte Form ist.

Wir führen jetzt auch in der rechten Seite von (25) den Grenzübergang durch. Es ist

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon|\, \lambda_p^{(\varepsilon)}} = \sum_{p=1}^{M|\lg \varepsilon|} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon|\, \lambda_p^{(\varepsilon)}} + R_M, \tag{29}$$

wobei

$$R_M = \sum_{p=M|\lg \varepsilon|+1}^{\infty} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon|\, \lambda_p^{(\varepsilon)}}.$$

Da nun nach (24) und VIII

$$(xx) = \sum_{p} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon|}$$

ist, so folgt

$$|R_M| \leqq \frac{1}{\lambda_{M|\lg \varepsilon|+1}}; \tag{30}$$

$|R_M|$ kann also, wenn wir M groß genug wählen, unabhängig von ε beliebig klein gemacht werden.

Von dem ersten Gliede läßt sich von vornherein erwarten, daß es gegen ein Integral konvergieren wird; es ist dieser Übergang nur noch in seinen Einzelheiten zu verfolgen. Wir setzen

$$(31)\quad l_i^{(\mu)} = \int_0^1 \sqrt{2}\, \varphi_\mu(s) \sin(i\pi s)\, ds = \int_0^1 \sqrt{2} \sin(\mu\pi\,|\lg s|)\, \frac{\sin(i\pi s)}{\sqrt{s}}\, ds,$$

$$(32)\quad \sum_{i=1}^{\infty} l_i^{(\mu)} x_i = L_\mu(x) = L(x, \mu).$$

Jetzt ist zwar jedes einzelne $l_i^{(\mu)}$ endlich und nach (31) für alle i und μ unterhalb einer festen Grenze, aber $\sum_{i=1}^{\infty} (l_i^{(\mu)})^2$ nimmt einen unendlich großen Wert an, wie man sofort sieht, wenn man $\varphi_\mu(s)$ für $s < \delta$ gleich 0 setzt, und, was dann erlaubt ist, (19) anwendet. Dann ist aber $L_\mu(x)$ keine beschränkte Linearform mehr, vielmehr muß es Werte x geben, für welche $(xx) \leqq 1$ ist und $L_\mu(x)$ unendlich groß wird. Denn die Herren Hellinger und Toeplitz*) haben gezeigt, daß, wenn eine Linearform $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ für alle x konvergiert, für welche $(xx) \leqq 1$ ist, immer $\sum a_i^2$ konvergiert; daraus folgt aber, daß $L_\mu(x)$ nicht für alle $(xx) \leqq 1$ konvergieren kann. Dieser Umstand rechtfertigt es, wenn wir im folgenden eine weit engere Bedingung einführen; es reicht für unsere nächsten Zwecke aus, daß

$$(33)\quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

konvergent ist.

Linearformen, welche mit $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{2-\delta}$ gleichzeitig konvergieren, wenn δ irgend eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist, nennen wir *semibeschränkt*; semibeschränkte Linearformen**) werden in der folgenden Theorie überhaupt von großer Bedeutung sein. Wir nehmen jetzt an, daß (33) erfüllt sei. Wir beweisen dann, daß unter dieser Voraussetzung $L(x, \mu)$ in bezug auf μ integrabel ist und daß

$$(34)\quad \lim_{\varepsilon = 0} \sum_{p=1}^{M|\lg \varepsilon|} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon| \left(1 + \frac{p^2\pi^2}{|\lg \varepsilon|^2}\right)} = 2 \int_0^M \frac{(L(x, \mu))^2}{1 + \mu^2\pi^2}\, d\mu.$$

---

*) Göttinger Nachrichten 1906: Theorie der unendlichen Matrizen.

**) Diese Formen sind sehr nahe mit den von Herrn Hellinger in seiner Inauguraldissertation (Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen, Göttingen 1907) eingeführten Differentialformen verwandt.

Da nämlich die $l_i^{(\mu)}$, sowie die $l_i^{p,\varepsilon}$ unter einer festen Grenze*) liegen, die von i, μ, p und ε unabhängig gewählt werden kann, so folgt aus (33), daß man m bei einem vorgegebenen δ so groß bestimmen kann, daß

$$\sum_{i=m}^{\infty} |l_i^{(\mu)} x_i| \leqq \frac{\delta}{4}; \quad \sum_{i=m}^{\infty} |l_i^{p,\varepsilon} x_i| \leqq \frac{\delta}{4}. \tag{35}$$

Da also $\sum\limits_{i=1}^{\infty} l_i^{(\mu)} x_i$ in bezug auf μ gleichmäßig konvergiert, so haben wir nur zu zeigen, daß $l_i^{(\mu)}$ integrabel in bezug auf μ ist; dann folgt (34), wenn wir noch zeigen können, daß man ε so klein wählen kann, daß

$$|L(x,\mu) - L_{\varkappa_\varepsilon}^{(\varepsilon)}(x)| \leqq \delta \tag{36}$$

wird, wenn $\varkappa_\varepsilon = \mu |\lg \varepsilon| + k$ und k eine beliebige endliche Zahl ist.

Unter Berücksichtigung von (35) findet man, daß alle Behauptungen bewiesen sind, wenn wir für ein beliebig großes, aber festes m zeigen können, daß man

$$|l_i^{(\mu)} - l_i^{\varkappa_\varepsilon,\varepsilon}| \leqq \frac{\delta}{2m} \tag{37}$$

machen kann, denn daraus folgt, daß die Schwankung von $L(x,\mu)$ in einem genügend kleinen Intervall μ beliebig klein gemacht werden kann und hieraus folgt in Verbindung mit (37) die Formel (34).

Nun ist

$$l_i^{(\mu)} = \int_0^1 \sqrt{2} \sin(\mu\pi |\lg s|) \sin(i\pi s) \frac{ds}{\sqrt{s}};$$

$$l_i^{\varkappa_\varepsilon,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 \sqrt{2} \sin\left(\frac{(\mu|\lg\varepsilon| + k)\pi |\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right) \frac{\sin(i\pi s)}{\sqrt{s}} ds$$

und

$$\left|\int_0^\varepsilon \sqrt{2} \sin\left(\frac{(\mu|\lg\varepsilon| + k)\pi|\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right) \frac{\sin(i\pi s)}{\sqrt{s}} ds\right| \leqq \sqrt{2}\int_0^\varepsilon \frac{ds}{|\sqrt{s}|} = 2\sqrt{2}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

ferner:

$$\sin(\mu\pi|\lg s|) - \sin\left(\mu\pi|\lg s| + \frac{k\pi}{|\lg\varepsilon|}|\lg s|\right)$$
$$= -2\cos\left(\left(\mu\pi + \frac{k\pi}{2|\lg\varepsilon|}\right)|\lg s|\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\cdot\frac{|\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right).$$

Also ist:

---

*) Schärfere Abschätzungen über das Unendlichkleinwerden von $l_i^{p,\varepsilon}$ mit wachsendem p sind an dieser Stelle noch nicht notwendig, zeigen jedoch, daß weit beschränktere Voraussetzungen als (33) genügen.

$$\left|\int_0^1 \sqrt{2}\left[\sin(\mu\pi|\lg s|) - \sin\left(\mu\pi|\lg s| + \frac{k\pi}{|\lg\varepsilon|}|\lg s|\right)\frac{\sin(i\pi s)}{\sqrt{s}}\right]ds\right|$$

$$= \left|\int_0^1 2\sqrt{2}\cos\left(\left(\mu\pi + \frac{k\pi}{2|\lg\varepsilon|}\right)|\lg s|\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\frac{|\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}\right|$$

$$\leqq 2\sqrt{2}\int_0^1\left|\sin\left(\frac{k\pi}{2}\frac{|\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right)\right|\frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

Wir zerlegen jetzt das Intervall 0 bis 1 in zwei Teile, von 0 bis δ' und von δ' bis 1, wobei wir ε und δ' so wählen, daß

$$\left|\sin\left(\frac{k\pi}{2}\frac{|\lg\delta'|}{|\lg\varepsilon|}\right)\right| < \frac{\delta}{16\sqrt{2}m}; \quad \left|\int_0^{\delta'}\frac{ds}{\sqrt{s}}\right| \leqq \frac{\delta}{16\sqrt{2}m}.$$

Dann folgt:

$$2\sqrt{2}\int_0^1\left|\sin\left(\frac{k\pi}{2}\frac{|\lg s|}{|\lg\varepsilon|}\right)\right|\frac{ds}{\sqrt{s}} \leqq \frac{3\delta}{8m}.$$

Faßt man dieses zusammen, so folgt (37) und daraus (34).*) Dieselbe Betrachtung lehrt aber auch unter Berücksichtigung von (30), daß man M so groß wählen kann, daß

$$(38) \qquad 2\int_M^{M+N}\frac{(L(x,\mu))^2}{1+\mu^2\pi^2}d\mu \leqq \delta,$$

wie groß auch N sein mag; also folgt aus (25), (27), (34), (38)

$$(39) \qquad K(xx) = 2\int_0^\infty\frac{(L(x,\mu))^2}{1+\mu^2\pi^2}d\mu.$$

Aus (39) folgt, indem man x durch $x+y$ ersetzt, d. h. „polarisiert“,

$$(40) \qquad K(xy) = 2\int_0^\infty\frac{L(x,\mu)\,L(y,\mu)}{1+\mu^2\pi^2}d\mu.$$

*) Der wesentliche, verallgemeinerungsfähige Gedanke dieses Beweises von (37), den wir hier der Klarheit wegen rechnerisch durchgeführt haben, besteht in folgendem. Das Intervall, über welches die beiden Integrale für $l_i^{(\mu)}$ bzw. $l_i^{\varkappa_\varepsilon,\varepsilon}$ zu nehmen sind, wird in zwei Teile geteilt; der eine geht von 0 bis δ', der andere von δ' bis 1. Das erste Intervall kann so klein gemacht werden, daß die beiden dazugehörigen Integrale beliebig klein werden, im anderen Intervalle sind die Funktionen unter den Integralzeichen dieselben analytischen Funktionen der diesbezüglichen Eigenwerte, also hier analytische Funktionen von $\mu\pi$ bzw. von $\mu\pi + \frac{k\pi}{|\lg\varepsilon|}$. Der Unterschied zwischen den beiden über das Intervall $(\delta', 1)$ erstreckten Integralen kann also auch beliebig klein gemacht werden, wenn der Unterschied zwischen den diesbezüglichen Eigenwerten klein genug ist.

§ 4.

Ableitung des Fourierschen Integraltheorems.

Aus (40) können wir jetzt das Fouriersche Integraltheorem ableiten; zu diesem Zwecke setzen wir:

(41)
$$x_p^{(\varepsilon)} = \int_0^1 K_\varepsilon(st)\sqrt{2}\sin(p\pi t)\,dt = k_p^{(\varepsilon)}(s), \quad x_p^{\cdot} = k_p(s),$$
$$y_q = \int_0^1 g(t)\sqrt{2}\sin(q\pi t)\,dt,$$

wobei $g(t)$ in 0 und 1 verschwinden und eine erste Ableitung besitzen soll, die den Dirichletschen Bedingungen genügt. Es habe jetzt s einen festen, von 0 verschiedenen Wert; dann wählen wir ε kleiner als s. $K_\varepsilon(st)$ ist unter dieser Voraussetzung eine stetige Funktion von t, deren erste Ableitung nach t überall endlich ist, wenn wir sie mit $\sqrt{t}$ multiplizieren; die erste Ableitung erleidet ferner nur in ε und s einen Sprung. Die mit $\sqrt{t}$ multiplizierte Ableitung nach t von $K_\varepsilon(st)$ bleibt überdies unter einer für alle ε gleichen endlichen Grenze. Man findet dann, eine bekannte Eigenschaft*) der gewöhnlichen Fourierkoeffizienten benützend:

(42)
$$|x_p^{(\varepsilon)}| = |k_p^{(\varepsilon)}(s)| \leqq \left|\frac{A}{p^{\frac{3}{2}}}\right|; \quad |y_q| \leqq \frac{B}{q^2},$$

wobei A bei festem s eine Konstante ist, die wir für alle ε gleich annehmen dürfen; ebenso ist B eine endliche Konstante. Da dann

$$\sum_{p=1}^{\infty}(x_p^{(\varepsilon)})^2 \quad \text{und} \quad \sum_{q=1}^{\infty} y_q^2$$

gleichmäßig für alle ε konvergieren, so findet man wie bei IV

(43)
$$\lim_{\varepsilon=0} K_\varepsilon(x^{(\varepsilon)}y) = K(xy).$$

Nun ist aber:

$$K_\varepsilon(x^{(\varepsilon)}y) = \sum_p x_p^{(\varepsilon)} \sum_q k_{pq}^{(\varepsilon)} y_q$$
$$= \sum_p x_p^{(\varepsilon)}\, 2 \sum_q \int_0^1\!\!\int_0^1 K_\varepsilon(\sigma t)\sin(p\pi t)\sin(q\pi\sigma)\,d\sigma\,dt\,y_q$$
$$= \sqrt{2}\sum_p x_p^{(\varepsilon)} \int_0^1\!\!\int_0^1 K_\varepsilon(\sigma t)\,g(\sigma)\sin(p\pi t)\,d\sigma\,dt$$
$$= \int_0^1\!\!\int_0^1 K_\varepsilon(st)\,K_\varepsilon(\sigma t)\,g(\sigma)\,d\sigma\,dt = \int_0^1 K_\varepsilon^{(2)}(st)\,g(t)\,dt,$$

*) Vgl. z. B. E. Picard, Traité d'Analyse I, 1. Aufl., S. 233.

wie aus (19) unmittelbar folgt. Dabei ist

$$\int_0^1 K_\varepsilon(s\sigma)\, K_\varepsilon(\sigma t)\, d\sigma = K_\varepsilon^{(2)}(st);$$

also, wenn z. B. $s \geqq t \geqq \varepsilon$,

$$K_\varepsilon^{(2)}(st) = \int_\varepsilon^t \frac{\left(\sigma - \frac{\varepsilon^2}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{1}{s} - s\right)\left(\frac{1}{t} - t\right)}{4\sigma \sqrt{s}\sqrt{t}(1-\varepsilon^2)^2}\, d\sigma + \int_t^s \frac{\left(\frac{1}{\sigma} - \sigma\right)\left(\sigma - \frac{\varepsilon^2}{\sigma}\right)\left(t - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)\left(\frac{1}{s} - s\right)}{4\sigma\sqrt{s}\sqrt{t}(1-\varepsilon^2)^2}\, d\sigma$$

$$+ \int_s^1 \frac{\left(\frac{1}{\sigma} - \sigma\right)^2 \left(t - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)\left(s - \frac{\varepsilon^2}{s}\right)}{4\sigma\sqrt{s}\sqrt{t}(1-\varepsilon^2)^2}\, d\sigma.$$

Dieser Ausdruck lehrt unmittelbar:

$$(44) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \int_0^1 K_\varepsilon^{(2)}(st)\, g(t)\, dt = \int_0^1 K^{(2)}(st)\, g(t)\, dt.$$

Das Vorhergehende zusammenfassend haben wir also:

$$K(xy) = \int_0^1 K^{(2)}(st)\, g(t)\, dt;$$

wobei

$$K^{(2)}(st) = \int_0^1 K(s\sigma)\, K(\sigma t)\, d\sigma$$

ist.

Wir müssen das analoge Verfahren auf der rechten Seite von (40) anwenden. Da $\sum_{p=1}^{\infty} |x_p^{(\varepsilon)}|$ für alle ε gleichmäßig konvergiert, ebenso $\sum_{q=1}^{\infty} |y_q|$ konvergiert, so folgt wie bei (36)

$$L(x, \mu) = \lim_{\varepsilon=0} L_\varkappa^{(\varepsilon)}(x^{(\varepsilon)}); \quad L(y, \mu) = \lim_{\varepsilon=0} L_\varkappa^{(\varepsilon)}(y),$$

wobei $\varkappa = \mu\, |\lg \varepsilon|$ sein mag, und wir uns den an sich willkürlichen Grenzübergang so vollzogen denken, daß $\varkappa$ immer eine ganze Zahl ist. Dann wird nach (23), (12), (19) und (10)

$$(45) \quad L_\varkappa^{(\varepsilon)}(x^{(\varepsilon)}) = \frac{1}{1+\mu^2\pi^2} \frac{\sin(\mu\pi\,|\lg s|)}{\sqrt{s}}; \quad L_\varkappa^{(\varepsilon)}(y) = \int_\varepsilon^1 g(t) \frac{\sin(\mu\pi\,|\lg t|)\, dt}{\sqrt{t}}.$$

Es ist also:

(45 a) $$L(x,\mu) = \frac{1}{1+\mu^2\pi^2}\,\frac{\sin(\mu\pi\,|\lg s|)}{\sqrt{s}}.$$

Wir setzen jetzt:

(46) $$f_1^{(\varepsilon)}(s) = \int_0^1 K_\varepsilon^{(2)}(st)\,g(t)\,dt;$$

dann ist nach (45) und (10):

$$\frac{L_x^{(\varepsilon)}(y)}{(1+\mu^2\pi^2)^2} = \int_\varepsilon^1 \frac{\sin(\mu\pi\,|\lg(t)|)}{\sqrt{t}}\,f_1^{(\varepsilon)}(t)\,dt,$$

also

(47) $$\lim_{\varepsilon=0}\frac{L_x^{(\varepsilon)}(x^{(\varepsilon)})\,L_x^{(\varepsilon)}(y)}{1+\mu^2\pi^2} = \frac{\sin(\mu\pi\,|\lg s|)}{\sqrt{s}}\cdot\int_0^1 f_1(t)\,\sin(\mu\pi\,|\lg t|)\frac{dt}{\sqrt{t}}$$
$$= \frac{L(x,\mu)\,L(y,\mu)}{1+\mu^2\pi^2}.$$

Wir setzen nun:

(48) $$f_1(s)\sqrt{s} = f(s) = \sqrt{s}\int_0^1 K^{(2)}(st)\,g(t)\,dt,$$

dann ist:

(49) $$f(s) = 2\int_0^\infty d\mu\,\sin(\mu\pi\,|\lg s|)\int_0^1 \sin(\mu\pi\,|\lg t|)\,f(t)\,\frac{dt}{t}.$$

Es ist noch anzugeben, unter welchen Bedingungen sich $f(s)$ in der Form (48) darstellen läßt. Wir setzen zu diesem Zwecke:

$$f(s) = \sqrt{s}\int_0^1 K(st)\,g_1(t)\,dt;\quad g_1(t) = \int_0^1 K(t\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

und führen wieder statt $K(st)$

$$\frac{G(st)}{\sqrt{s}\sqrt{t}} = K(st)$$

ein; dabei genügt $G(st)$ der Gleichung (4) und hat die charakteristische Unstetigkeit der Greenschen Funktion. Man hat also:

$$f(s) = \int_0^1 \frac{G(st)\,g_1(t)}{\sqrt{t}}\,dt;\quad g_1(t) = \int_0^1 \frac{G(t\tau)}{\sqrt{t}\sqrt{\tau}}\,g(\tau)\,d\tau,$$

und es ergibt sich:

$$-\frac{g_1(t)}{\sqrt{t}} = \frac{d}{dt}\,t\,\frac{df(t)}{dt} - \frac{f(t)}{t};\quad -\frac{g(t)}{\sqrt{t}} = \frac{d}{dt}\,t\,\frac{d}{dt}\left(g_1(t)\sqrt{t}\right) - \frac{g_1(t)\sqrt{t}}{t},$$

was man durch Anwendung des Greenschen Satzes auf die linke Seite von (4) verifiziert, indem man für u $G(st)$, für v im ersten Falle $f(t)$, im zweiten Falle $g_1(t)\sqrt{t}$ setzt. Dabei muß aber $f(t)$ und $g_1(t)\sqrt{t}$ für $t = 0$ und $t = 1$ verschwinden und überall zweimal stetig differentiierbar sein. Wir schreiben nun etwas symmetrischer:

$$-g_1(t)\sqrt{t} = -g_2(t) = t\frac{d}{dt}\,t\frac{df}{dt} - f(t); \quad -g(t)\sqrt{t} = t\frac{d}{dt}\,t\frac{d}{dt}g_2(t) - g_2(t).$$

Das so bei gegebenem $f(t)$ definierte $g(t)$ muß in 0 und 1 verschwinden und eine stetige erste Ableitung besitzen.

§ 5.

Bildung der Resolvente $\mathsf{K}(\lambda; xx)$ von $K(xx)$.

Um die so aufgestellten Bedingungen für $f(s)$ zu vereinfachen, müssen wir die vorher abgebrochene Theorie der quadratischen Formen weiter ausbauen und speziell suchen, die in V definierte Resolvente $\mathsf{K}(\lambda; xx)$ zu gewinnen.

Aus der Definitionsgleichung in V für $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xy)$ folgt zunächst formal

$$(50)\quad \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx) = (xx) + \lambda K_\varepsilon(xx) + \lambda^2 K_\varepsilon^{(2)}(xx) + \cdots + \lambda^n K_\varepsilon^{(n)}(xx) + \cdots,$$

wobei $K_\varepsilon^{(n)}(xx) = K_\varepsilon^{(n-1)}(x\cdot)K(\cdot x)$ die n^{te} iterierte Form ist. Ferner ist für alle ε, wie wir früher gesehen haben,

$$|K_\varepsilon(xx)| \leqq 1,$$

ebenso folgt aus der etwas weiter unten in (51b) gegebenen Darstellung

$$|K_\varepsilon^{(2)}(xx)| \leqq 1, \quad |K_\varepsilon^{(n)}(xx)| \leqq 1$$

und daher konvergiert die Reihe in (50) für

$$|\lambda| \leqq |\lambda'| < 1.\text{*)}$$

Wir können also für alle ε n so groß angeben, daß, wenn wir setzen:

$$(51)\quad \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx) = (xx) + \lambda K_\varepsilon(xx) + \cdots + \lambda^{(n-1)} K_\varepsilon^{(n-1)}(xx) + R_{1,n}^{(\varepsilon)},$$

$|R_{1,n}^{(\varepsilon)}| \leqq \delta$ für alle ε wird. Ferner ist nach (25) und (29) und der Definition von $K_\varepsilon^{(n)}(xx)$

$$(51\text{a})\qquad K_\varepsilon(xx) = \sum_{p=1}^{M|\lg\varepsilon|} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg\varepsilon|\,\lambda_p^{(\varepsilon)}} + R_M^{(\varepsilon)},$$

$$(51\text{b})\qquad K_\varepsilon^{(n)}(xx) = \sum_{p=1}^{M|\lg\varepsilon|} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg\varepsilon|\left(\lambda_p^{(\varepsilon)}\right)^n} + R_{M,n}^{(\varepsilon)},$$

*) An dieser Voraussetzung für λ wird im folgenden festgehalten, soweit nichts anderes bemerkt ist.

wobei die $R_{m,n}^{(\varepsilon)}$ mit wachsendem n immer kleiner werden; man zeigt dann, wie bei (39), daß, wenn n eine endliche Zahl ist und $\sum |x_i|$ konvergiert, man ε so klein bestimmen kann, daß für alle $\varepsilon' < \varepsilon$, $\varepsilon'' < \varepsilon$

$$|K_{\varepsilon'}(xx) - K_{\varepsilon''}(xx)| \leqq \delta, \quad |K_{\varepsilon'}^{(2)}(xx) - K_{\varepsilon''}^{(2)}(xx)| \leqq \delta,$$
$$|K_{\varepsilon'}^{(n)}(xx) - K_{\varepsilon''}^{(n)}(xx)| \leqq \delta;$$

folglich ist auch:

$$|\mathsf{K}_{\varepsilon'}(\lambda; xx) - \mathsf{K}_{\varepsilon''}(\lambda; xx)| \leqq \delta \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} + \delta.$$

Die $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx)$ konvergieren also mit abnehmendem ε gegen eine quadratische Form $\mathsf{K}(\lambda; xx)$, wenn $|\lambda| \leqq |\lambda'| < 1$ ist und $\sum |x_i|$ konvergiert. Da nun $|\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx)|$ für alle ε unter einer festen Grenze liegt, die unabhängig von ε ist, sofern $(xx) \leqq 1$, so ist $\mathsf{K}(\lambda; xx)$ gewiß auch eine beschränkte quadratische Form, wenn wir noch zeigen, daß, wenn nur $(xx) \leqq 1$,

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx) = \mathsf{K}(\lambda; xx).$$

In der Tat sei nun:

$$\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx) = \sum_{p,q} \varkappa_{pq}^{(\varepsilon)} x_p x_q; \quad \mathsf{K}(\lambda; xx) = \sum_{p,q} \varkappa_{pq} x_p x_q.$$

Setzt man dann alle $x = 0$ außer x_p; $x_p = 1$, wobei p irgend eine beliebige ganze Zahl ist, so folgt

$$\lim_{\varepsilon=0} \varkappa_{pp}^{(\varepsilon)} = \varkappa_{pp};$$

ebenso findet man für irgend ein q

$$\lim_{\varepsilon=0} \varkappa_{qq}^{(\varepsilon)} = \varkappa_{qq}.$$

Setzt man alle $x = 0$, außer x_p und x_q, so findet man

$$\lim_{\varepsilon=0} \varkappa_{pq}^{(\varepsilon)} = \varkappa_{pq}$$

und nach IV

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xx) = \mathsf{K}(\lambda; xx).$$

Setzen wir nun:

$$K_{\varepsilon, M}(xx) = \sum_{p=1}^{M|\lg \varepsilon|} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg \varepsilon| \lambda_p^{(\varepsilon)}},$$

so ist nach (51a) für alle x und ε gleichmäßig

$$\lim_{M=\infty} K_{\varepsilon, M}(xx) = K_\varepsilon(xx)$$

und nach VIII die zu $K_{\varepsilon,M}(xx)$ gehörige Resolvente

$$\mathsf{K}_{\varepsilon,M}(\lambda;xx) = \sum_{p=1}^{M|\lg\varepsilon|} \frac{2\left(L_p^{(\varepsilon)}(x)\right)^2}{|\lg\varepsilon|\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_p^{(\varepsilon)}}\right)} + E_{\varepsilon,M}(xx),$$

wobei $E_{\varepsilon,M}(xx)$ die Summe der Quadrate der zu $\lambda_p^{(\varepsilon)} = \infty$ gehörigen Eigenformen von $K_{\varepsilon,M}(xx)$ ist. Dann zeigt man, wie bei $\mathsf{K}(\lambda;xx)$, daß $\mathsf{K}_{\varepsilon,M}(\lambda;xx)$ mit nach 0 abnehmendem ε nach $\mathsf{K}_M(\lambda;xx)$ konvergiert; da ferner die Summe nach einem bestimmten Grenzwert konvergiert, so ist, wenn $\sum |x_i|$ konvergiert, auch

$$\lim_{\varepsilon=0} E_{\varepsilon,M}(xx) = E_M(xx)$$

und

$$(52) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_{\varepsilon,M}(\lambda;xx) = \mathsf{K}_M(\lambda;xx) = 2\int_0^M \frac{(L(x,\mu))^2}{1-\frac{\lambda}{1+\mu^2\pi^2}}\,d\mu + E_M(xx).$$

Nun folgt aus der zu (50) analogen Darstellung von $\mathsf{K}_{\varepsilon,M}(\lambda;xx)$ unmittelbar:

$$\lim_{M=\infty} \mathsf{K}_{\varepsilon,M}(\lambda;xx) = \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;xx),$$

und zwar gilt diese Gleichung gleichmäßig für alle ε; es ist also auch

$$\lim_{M=\infty} \mathsf{K}_M(\lambda;xx) = \mathsf{K}(\lambda;xx).$$

Da nun in (52) das Integral stets kleiner ist als $\mathsf{K}(\lambda;xx)$ und es mit wachsendem M wächst, so konvergiert

$$\int_0^\infty \frac{(L(x,\mu))^2}{1-\frac{\lambda}{1+\mu^2\pi^2}}\,d\mu$$

und wir sehen, daß auch

$$\lim_{M=\infty} E_M(xx) = E(xx)$$

existiert. Es ist also

$$(53) \qquad \mathsf{K}(\lambda;xx) = 2\int_0^\infty \frac{(L(x,\mu))^2}{1-\frac{\lambda}{1+\mu^2\pi^2}}\,d\mu + E(xx).$$

Es bleibt aber noch zu zeigen, daß $\mathsf{K}(\lambda; x x)$ eine Resolvente von $K(x x)$ ist, d. h. der Identität genügt:

$$\mathsf{K}(\lambda; x y) - \lambda K(x \cdot) \mathsf{K}(\lambda; \cdot y) = (x y). \tag{54}$$

Der Nachweis dieser Tatsache ist deshalb etwas schwierig, weil man nicht ohne weiteres schließen darf, daß, wenn

$$\lim_{\varepsilon=0} A_\varepsilon(x x) = A(x x), \quad \lim_{\varepsilon=0} B_\varepsilon(x x) = B(x x)$$

ist, auch

$$\lim_{\varepsilon=0} A_\varepsilon(x \cdot) B_\varepsilon(\cdot x) = A(x \cdot) B(\cdot x)$$

ist.

Es sei n eine feste Zahl, wir setzen $x_p = 0$ für $p > n$. Dann ist

$$K_\varepsilon(x y) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}^{(\varepsilon)} x_p y_q = \sum_{q=1}^{\infty} k_q^{(\varepsilon)} y_q,$$

wobei

$$k_q^{(\varepsilon)} = \sum_{p=1}^{n} k_{pq}^{(\varepsilon)} x_p$$

ist.

Dann kann man eine endliche, von ε unabhängige Zahl A so angeben, daß für $p \leqq n$ und alle ε

$$|k_{pq}^{(\varepsilon)}| = \left| 2 \int_0^1 \sin(q \pi s) \int_0^1 \sin(p \pi t) K_\varepsilon(s t)\, dt\, ds \right| \leqq \frac{A}{q^{\frac{3}{2}}},$$

also

$$|k_q^{(\varepsilon)}| \leqq \frac{A \cdot n}{q^{\frac{3}{2}}},$$

wenn jedes $|x_i| \leqq 1$ ist, und zwar gilt dieses für jedes ε, auch für $\varepsilon = 0$.

Da nun $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x y)$ für jedes ε unter einer festen Grenze M liegt, so ist, wenn $(x x) \leqq 1$, $(y y) \leqq 1$ ist, nach IIb

$$\sum_i \left(\frac{\partial (\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x y))}{\partial x_i} \right)^2 \leqq M^2$$

für alle ε und auch für $\varepsilon = 0$; daher ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x y)) \leqq M$$

für alle ε.

Es ist also:

$$K_\varepsilon(x\cdot)\,\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\cdot y)=\sum_{q=1}^{\infty}k_q^{(\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\,x\,y))$$

$$=\sum_{q=1}^{m}k_q^{(\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\,x\,y))+R_m^{(\varepsilon)},$$

wobei wir m so groß wählen können, daß

$$|R_m^{(\varepsilon)}|\leqq\delta$$

für alle ε. Denn es ist ja

$$\left|\sum_{q=m}^{\infty}k_q^{(\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\,x\,y))\right|\leqq n\,A\,M\sum_{q=m}^{\infty}\frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Ebenso findet man:

$$K(x\cdot)\,\mathsf{K}(\lambda;\cdot y)=\sum_{q=1}^{\infty}k_q\frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}(\lambda;\,x\,y))=\sum_{q=1}^{m}k_q\frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}(\lambda;\,x\,y))+R_m,$$

wobei

$$|R_m|\leqq\delta.$$

Nun ist aber $\lim\limits_{\varepsilon=0}\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\,x\,y)=\mathsf{K}(\lambda;\,x\,y)$, d. h. man kann bei festen x und y zu der beliebig klein vorgeschriebenen Zahl δ ε so klein bestimmen, daß $|\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\,x\,y)-\mathsf{K}(\lambda;\,x\,y)|\leqq\frac{\delta}{m}$.

Wir bestimmen ε so klein, daß diese Ungleichung erfüllt ist für die folgenden Wertsysteme der x:

$$\begin{array}{llll}x_1=1, & x_2=0,\;\cdots, & x_m=0, & x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=0,\\ x_1=0, & x_2=1, & x_m=0, & x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=0,\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1=0, & x_2=0, & x_m=1, & x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=0,\end{array}$$

während die y allemal feste Werte haben. Ferner sei ε so klein, daß

$$|k_q^{(\varepsilon)}-k_q|\leqq\frac{\delta}{m}\quad\text{für } q<m.$$

Dann aber ist, wenn $x_p=0$ für alle $p>n$ ist:

$$|K(x\cdot)\,\mathsf{K}(\lambda;\cdot y)-K_\varepsilon(x\cdot)\,\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\cdot y)|$$

$$\leqq\left|\sum_{q=1}^{m}\left(k_q\frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}(\lambda;\,x\,y))-k_q^{(\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial x_q}(\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\,x\,y))\right)\right|+2\delta,$$

ferner

$$\left| k_q \frac{\partial}{\partial x_q} \mathsf{K}(\lambda;\, x y) - k_q^{(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_q} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, x y) \right|$$

$$\leqq |k_q| \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_q} (\mathsf{K}(\lambda;\, x y)) - \frac{\partial}{\partial x_q} (\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, x y)) \right) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_q} (\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, x y)) (k_q - k_q^{(\varepsilon)}) \right|$$

$$\leqq |k_q| \frac{\delta}{m} + \left| \frac{\partial}{\partial x_q} (\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, x y)) \right| \frac{\delta}{m} \leqq A n \frac{\delta}{m} + \frac{M \delta}{m},$$

wobei immer $q \leqq m$ ist. Man erhält nämlich eben $\frac{\partial}{\partial x_q} \mathsf{K}(\lambda; x y)$, indem man $x_p = 0$ für $p \neq q$, $x_q = 1$ setzt. Also ist schließlich:

$$|K(x\,\cdot) \mathsf{K}(\lambda;\,\cdot y) - K_\varepsilon(x\,\cdot) \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\,\cdot y)| \leqq (A n + M + 2)\delta,$$

d. h.

$$\lim_{\varepsilon=0} K_\varepsilon(x\,\cdot) \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\,\cdot y) = K(x\,\cdot) \mathsf{K}(\lambda;\,\cdot y).$$

Da ferner

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x y) = \mathsf{K}(\lambda; x y); \quad \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x y) - \lambda K_\varepsilon(x\,\cdot) \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\,\cdot y) = (x y),$$

so folgt:

$$(54) \qquad \mathsf{K}(\lambda; x y) - \lambda K(x\,\cdot) \mathsf{K}(\lambda;\,\cdot y) = (x y),$$

was zunächst nur gilt, wenn $x_p = 0$ für $p > n$; nach III folgt daraus die allgemeine Richtigkeit. Die in (53) definierte quadratische Form $\mathsf{K}(\lambda; x x)$ ist also eine Resolvente von $K(x x)$. Es ist aber auch die einzige Resolvente, wie aus der Entwicklung (50) folgt. Ersetzt man in (53) x durch $x + y$ und setzt $\lambda = 0$, so folgt

$$(55) \qquad (x y) = 2 \int_0^\infty L(x, \mu) L(y, \mu) d\mu + E(x y).$$

Aus (53) und (54) gewinnt man in einfacher Weise*):

$$(56) \qquad E(x\,\cdot) K(\cdot\, y) = 0,$$

d. h. es ist $E(x x)$ eine zu $\lambda = \infty$ gehörige Eigenform von $K(x x)$, und läßt sich als solche in der Form**)

$$(57) \qquad E(x y) = \sum_r M_r(x) M_r(y)$$

darstellen, wobei $M_r(x) = \sum_i m_{ri} x_i$ eine beschränkte Linearform und

$$(57\text{a}) \qquad M_r(\cdot) K(\cdot\, y) = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{q=1}^\infty k_{pq} m_{rq} = 0 \text{ für jedes } p \text{ ist.}$$

Wir haben damit in der Tat für unser spezielles $K(x x)$ die Hilbertsche Darstellung (vergl. VIII) *gewonnen.*

*) H. 4, S. 198.

**) H. 4, S. 193 und 195.

§ 6.

Neue Ableitung des Fourierschen Integraltheorems unter beschränkteren Voraussetzungen.

Um das Fouriersche Integraltheorem jetzt unter beschränkteren Voraussetzungen abzuleiten, gehen wir von (55) aus und ersetzen x und y, wie in (41) durch $k_p(s)$, bezüglich durch

$$\int_0^1 g(t)\sqrt{2}\sin(q\pi t)\,dt.$$

Dann wird nach (19)

$$(xy) = \int_0^1 K(st)\ g(t)\,dt.$$

Auf der rechten Seite betrachten wir zunächst $E(xy)$. Es folgt aus (57a), daß

$$M_r(k(s)) = \sum_{q=1}^{\infty} m_{rq} k_q(s) \equiv 0$$

für jedes r und s ist. In der Tat konvergiert

$$\sum_{q=1}^{\infty} m_{rq} k_q(s)\sqrt{s}$$

gleichmäßig für alle s. Denn $\sum_q (m_{rq})^2$ konvergiert, ferner ist nach (19)

$$\sum_q (k_q(s))^2 \cdot s = \int_0^1 (K(st))^2 \cdot s\,dt$$

und dieser Ausdruck bleibt für $0 \leqq s \leqq 1$ unter einer festen Grenze G. Und es ist nach (IIa) $(lx)^2 \leqq (ll)(xx)$; man kann nun k so groß angeben, daß $\sum_{q=k}^{\infty}(m_{rq})^2 < \delta$, also $\left|\sum_{q=k}^{\infty}(m_{rq} k_q(s)\sqrt{s}\right| < \sqrt{\delta \cdot G}$ ist. Daraus folgt aber die gleichmäßige Konvergenz. Wir dürfen also

$$\sqrt{2} \cdot \int_0^1 M_r(k(s))\sin(p\pi s)\,ds$$

gliedweise integrieren; daher ist

$$\sqrt{2}\int_0^1 M_r(k(s))\sin(p\pi s)ds = \sum_q m_{rq}\sqrt{2}\int_0^1 k_q(s)\sin(p\pi s)\,ds = \sum_q m_{rq} k_{pq} = 0$$

nach (57a). Wenn aber eine Funktion $\varphi(s)$ die Eigenschaft hat, daß $\varphi(s)\sqrt{s}$ überall für $0 \leqq s \leqq 1$ stetig ist und wenn für jedes p

$$\int_0^1 \varphi(s) \sin(p\pi s)\, ds = 0$$

ist, so folgt, daß $\varphi(s) \equiv 0$ ist. Zum Nachweise dieses Satzes können wir uns nicht, wie gewöhnlich, des Vollständigkeitstheorems (19) bedienen, da ja $\int_0^1 \varphi(s)^2 ds$ nicht existieren muß; dagegen wird folgendes, im wesentlichen von Herrn Lebesgue*) herrührendes Verfahren den Beweis erbringen.

Wir definieren $\varphi(s)$ für negative s so, daß $\varphi(s)$ eine ungerade Funktion ist. $\varphi(s)$ ist dann mit Ausnahme von $s = 0$ überall stetig und kann für keinen von 0 verschiedenen Wert s_1 einen von 0 verschiedenen Wert besitzen. Denn sonst ließe sich eine endliche Umgebung um s_1 z. B. von a bis b angeben, so daß $\varphi(s)$ größer als eine endliche, von 0 verschiedene Zahl k ist, wenn $a \leqq s \leqq b$. Nun ist für alle ganzzahligen p und q

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(s) \sin(p\pi s)\, ds = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \varphi(s) \cos(p\pi s)\, ds = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \varphi(s)\, ds = 0.$$

Es ist also auch

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(s) g(s)\, ds = 0,$$

wenn $g(s)$ ein Polynom von $\cos(\pi(s - \alpha))$ bedeutet und α irgend eine Konstante ist. Setzt man dann

$$g(s) = \left[1 + \cos\left(\pi\left(s - \frac{a+b}{2}\right)\right) - \cos\left(\pi\frac{(a-b)}{2}\right)\right]^n,$$

so ist der Klammerausdruck für $a \leqq s \leqq b$ größer als 1, sonst immer kleiner als 1. $|\varphi(s)\sqrt{s}|$ bleibe nun für alle in Betracht kommenden s unterhalb einer endlichen Größe M; wie groß wir dann auch n wählen mögen, der Beitrag des Integrals über das ganze Intervall mit Ausnahme von (a, b) ist kleiner als $M\int_{-1}^{+1} \frac{ds}{|\sqrt{s}|}$, also unterhalb einer festen Zahl. Der zum Intervall (a, b) gehörige Teil wird aber, wenn wir n groß genug

*) Vgl. H. Lebesgue, Séries trigonométriques, S. 38.

wählen, beliebig groß; die beiden Teile können sich also nicht gegenseitig aufheben; $\int\limits_{-1}^{+1} \varphi(s)\, g(s)\, ds$ kann also nicht 0 sein, wenn wir n als ganze Zahl groß genug wählen und annehmen, daß $\varphi(s)$ im Intervalle (a, b) irgendwo einen von 0 verschiedenen Wert hat.

$M_r(k(s))$ ist also identisch 0 für alle s bei beliebigem r. Es ist daher

$$E(xy) \equiv 0 \quad \text{für} \quad x_p = k_p(s).$$

Um den noch übrigen Teil der rechten Seite von (55) zu gewinnen, setzen wir nach (45b)

$$L(x, \mu) = \frac{1}{1+\mu^2\pi^2} \frac{\sin(\mu\pi\,|\lg s|)}{\sqrt{s}}.$$

Ferner ist

$$L(y, \mu) = \int\limits_0^1 g(t) \frac{\sin(\mu\pi\,|\lg t|)}{\sqrt{t}}\, dt = (1+\mu^2\pi^2) \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 g(t)\, K(t\tau) \frac{\sin(\mu\pi\,|\lg \tau|)}{\sqrt{\tau}}\, dt\, d\tau.$$

Dann erhält man schließlich statt (55):

$$f(s) = 2 \int\limits_0^\infty d\mu \sin(\mu\pi\,|\lg s|) \int\limits_0^1 \sin(\mu\pi\,|\lg t|) f(t) \frac{dt}{t},$$

wenn sich $f(s)$ in der Form $f(s) = \sqrt{s} \int\limits_0^1 K(st)\, g(t)\, dt$ darstellen läßt; wobei $g(t)$ stetig sein, in 0 und 1 verschwinden und eine stetige 1. Ableitung besitzen muß. Dabei ergibt sich wie auf S. 19 aus dem Greenschen Satze:

$$-\frac{g(t)}{\sqrt{t}} = \frac{d}{dt}\, t\, \frac{df(t)}{dt} - \frac{f(t)}{t}$$

unter der Voraussetzung, daß $f(t)$ für $t = 0$ und $t = 1$ verschwindet und zweimal stetig differentiierbar ist.

Damit ist das Fouriersche Integraltheorem aufs neue und unter beschränkteren Voraussetzungen abgeleitet.

§ 7.

Lösung der inhomogenen Integralgleichung.

Zum Schlusse dieses Kapitels behandeln wir noch die Frage nach der Lösbarkeit der inhomogenen Integralgleichung:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int\limits_0^1 K(st)\, \varphi(t)\, dt,$$

wenn $\lambda < 1$ ist und $f(s)$ eine stetige Funktion bedeutet, für welche

$$\int_0^1 (f(s))^2 \, ds \leqq 1$$

ist. Um die folgende Ableitung verständlich machen zu können, soll kurz die von Herrn Hilbert gegebene Methode*) skizziert werden, welche auf die Kerne $K_\varepsilon(st)$ anwendbar ist. Sei

$$\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xa) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(\varepsilon)} x_i; \qquad a_p = \sqrt{2} \int_0^1 f(s) \sin(p\pi s) \, ds;$$

dann ist nach (19) $\sum_p a_p^2 \leqq 1$, und $\sum_i (\alpha_i^{(\varepsilon)})^2$ konvergiert nach IIb auch für $\varepsilon = 0$, da $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xa)$ und $\mathsf{K}(\lambda; xa)$ in bezug auf x beschränkte Linearformen sind. Und aus der Definitionsgleichung in V für $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; xa)$ folgt:

$$\alpha_p^{(\varepsilon)} - \lambda \sum_q k_{pq}^{(\varepsilon)} \alpha_q^{(\varepsilon)} = a_p$$

für alle ganzzahligen Werte von p.

Man setzt dann

$$\alpha_1^{(\varepsilon)} k_1^{(\varepsilon)}(s) + \alpha_2^{(\varepsilon)} k_2^{(\varepsilon)}(s) + \cdots = \alpha^{(\varepsilon)}(s); \quad \alpha^{(0)}(s) = \alpha(s).$$

Diese Reihe konvergiert nach (IIc) bei beliebigem, von 0 verschiedenem ε gleichmäßig für alle s; da ferner

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i(s)^2 = \int_0^1 (K(st))^2 \, dt$$

ist und

$$s \cdot \int_0^1 (K(st))^2 \, dt$$

einen endlichen Wert hat, so konvergiert die Reihe auch noch für $\varepsilon = 0$ gleichmäßig in s, wenn wir jedes Glied mit $\sqrt{s}$ multipliziert haben. Wir dürfen also nach Multiplikation mit $\sin(p\pi s)$ bei jedem ε, selbst bei $\varepsilon = 0$, gliedweise integrieren und so folgt:

$$\lambda \int_0^1 \sin(p\pi s) \sqrt{2}\, \alpha^{(\varepsilon)}(s) \, ds = \lambda (\alpha_1^{(\varepsilon)} k_{p1}^{(\varepsilon)} + \alpha_2^{(\varepsilon)} k_{p2}^{(\varepsilon)} + \cdots) = \alpha_p^{(\varepsilon)} - a_p.$$

Setzt man

$$\varphi^{(\varepsilon)}(s) = f(s) + \lambda \alpha^{(\varepsilon)}(s), \quad \text{so ist} \quad \int_0^1 \sin(p\pi s) \sqrt{2}\, \varphi^{(\varepsilon)}(s) \, ds = \alpha_p^{(\varepsilon)},$$

*) H. 5, S. 448.

es sind also die $\alpha_p^{(\varepsilon)}$ die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion $\varphi^{(\varepsilon)}(s)$, wenn $\varepsilon \neq 0$. Also folgt nach (19)

$$\lambda \int_0^1 K_\varepsilon(st)\,\varphi^{(\varepsilon)}(t)\,dt = \lambda \sum_p \alpha_p^{(\varepsilon)} k_p^{(\varepsilon)}(s) = \varphi^{(\varepsilon)}(s) - f(s)$$

oder

$$f(s) = \varphi^{(\varepsilon)}(s) - \lambda \int_0^1 K_\varepsilon(st)\,\varphi^{(\varepsilon)}(t)\,dt. \tag{58}$$

Es ist zu untersuchen, was aus (58) wird, wenn ε nach 0 konvergiert. s habe einen von 0 verschiedenen festen Wert. Aus der oben gemachten Bemerkung anläßlich der gleichmäßigen Konvergenz von $\alpha^{(\varepsilon)}(t)\sqrt{t}$ folgt, daß $\alpha^{(\varepsilon)}(t)\sqrt{t}$ für alle zwischen 0 und 1 liegenden Werte von t und für alle ε unter einer festen Grenze liegt; dann kann man aber zu jedem δ ein δ' so angeben, daß

$$\left| \int_0^{\delta'} K_\varepsilon(st)\,\varphi^{(\varepsilon)}(t)\,dt \right| < \frac{\delta}{2}$$

für alle ε, auch für $\varepsilon = 0$. Es bleibt also nur noch der Nachweis, daß

$$\lim_{\varepsilon=0} \alpha^{(\varepsilon)}(t) = \alpha(t) \quad \text{für} \quad t \geqq \delta'$$

ist, wobei δ' eine von ε unabhängige, von 0 verschiedene feste Größe darstellt.

Nun ist nach dem früheren für $-1 < \lambda < 1$:

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, x\,y) = \mathsf{K}(\lambda;\, x\,y).$$

Um die Richtigkeit dieser Grenzgleichung für alle negativen λ nachzuweisen, geht man statt von $K_\varepsilon(xx)$ von $(xx) - K_\varepsilon(xx)$ aus.*) Aus der Definitionsgleichung von $\mathsf{K}(\lambda;\, xx)$ in V folgt, daß dann die Resolvente $\mathsf{K}_\varepsilon^*\left(\frac{\lambda}{\lambda-1};\, x\,x\right)$ der neuen quadratischen Form $(xx) - K_\varepsilon(xx) = K_\varepsilon^*(xx)$ den Wert $(1-\lambda)\,\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, x\,x)$ hat. Und durch dasselbe Schlußverfahren, wie früher, findet man

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon^*\left(\frac{\lambda}{\lambda-1};\, xx\right) = \mathsf{K}^*\left(\frac{\lambda}{\lambda-1};\, xx\right) \quad \text{für} \quad \left|\frac{\lambda}{\lambda-1}\right| < 1,$$

also ist auch

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{K}_\varepsilon(\lambda;\, xx) = \mathsf{K}(\lambda;\, x\,x) \quad \text{für} \quad \left|\frac{\lambda}{\lambda-1}\right| < 1,$$

folglich sicher für $\lambda \leqq -1$.

---

*) H. 4, S. 183.

Nun folgt aus (42)

$$|k_p^{(\varepsilon)}(t)| \leqq \frac{A}{p^{\frac{3}{2}}},$$

wobei A für $t \geqq \delta'$ eine von ε und p unabhängige endliche Größe ist. Da die $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x\,a)$ für $\lambda < 1$ beschränkte Formen sind, die also für alle Werte von ε unter einer Größe B_λ liegen, so ist auch $|\alpha_p^{(\varepsilon)}| < B_\lambda$, da $\alpha_p^{(\varepsilon)}$ aus $\mathsf{K}_\varepsilon(\lambda; x\,a)$ hervorgeht, indem man $x_p = 1, x_q = 0$ für $q \neq p$ setzt. Wir bestimmen jetzt N so groß, daß für alle ε

$$\sum_{p=N}^{\infty} |k_p^{(\varepsilon)}(t)| < \frac{\delta}{4B_\lambda},$$

wenn $t \geqq \delta'$ ist; ferner wählen wir ε so klein, daß

$$|\alpha_p^{(\varepsilon)} - \alpha_p| < \frac{\delta}{4NA}$$

für $p \leqq N$, ebenso

$$|k_p^{(\varepsilon)}(t) - k_p(t)| < \frac{\delta}{4NB_\lambda}$$

wird. Dann ist:

$$\left| \sum_{p=1}^{\infty} \left(\alpha_p^{(\varepsilon)} k_p^{(\varepsilon)}(t) - \alpha_p k_p(t)\right) \right|$$

$$= \left| \sum_{p=1}^{N} (\alpha_p^{(\varepsilon)} - \alpha_p)\, k_p^{(\varepsilon)}(t) + \sum_{p=1}^{N} \alpha_p (k_p^{(\varepsilon)}(t) - k_p(t)) + \sum_{p=N}^{\infty} (k_p^{(\varepsilon)}(t)\, \alpha_p^{(\varepsilon)} - \alpha_p k_p(t)) \right| \leqq \delta,$$

d. h. es ist für alle $t > \delta'$ der Ausdruck $|\alpha^{(\varepsilon)}(t) - \alpha(t)| < \delta$. Führen wir jetzt $\varphi^{(\varepsilon)}(t)$ und $\varphi^{(0)}(t) = \varphi(t)$ ein, so ist für alle $t > \delta'$ der Ausdruck $|\varphi^{(\varepsilon)}(t) - \varphi(t)| < \delta$, wenn ε klein genug ist. Ebenso kann man bei festem, von 0 verschiedenem s stets erreichen, daß $|K_\varepsilon(st) - K(st)| < \delta$ für alle t wird. Es folgt also

$$\lim_{\varepsilon=0} \left| \varphi^{(\varepsilon)}(s) - \varphi(s) - \lambda \int_0^1 (K_\varepsilon(st)\, \varphi^{(\varepsilon)}(t) - K(st)\, \varphi(t))\, dt \right| = 0,$$

oder

(59) $$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(st)\, \varphi(t)\, dt.$$

Damit ist die Integralgleichung (59) *gelöst,* und so die Tragweite der Hilbertschen Methode gezeigt. In der Tat dürfte es unmöglich sein,

eine Integralgleichung von dem Typus (59) vermittelst der Fredholmschen Theorie zu behandeln. Es ist aber auch hervorzuheben, daß *K(st) zu dem Typus von Kernen gehört, der nach den Kernen, die auf (voll)stetige quadratische Formen führen, der einfachste ist.*

Man kommt nämlich auf stetige quadratische Formen, wie schon früher erwähnt wurde, wenn $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (K(st))^2\,ds\,dt$ einen endlichen Wert hat; in unserm Falle wird aber $\int\limits_\delta^1\int\limits_0^1 (K(st))^2\,ds\,dt$ *mit nach 0 konvergierendem* δ *gerade logarithmisch unendlich.*

Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, gedenke ich in einer folgenden Arbeit allgemein die Theorie derartiger Kerne zu behandeln.

Kapitel II.

Über die Darstellung willkürlicher Funktionen durch die Eigenfunktionen einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit einer geeigneten singulären Stelle am Ende des Intervalles.

§ 1.

Die Verteilung der Eigenwerte.

Wir gehen hier von der Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}s\frac{du}{ds}+\frac{(g^*(s)+\lambda^* h(s))}{s}u(s)=L(u)=0 \tag{60}$$

aus. Dabei sind $g^*(s), h(s)$ analytische Funktionen von s, die in der Umgebung der positiven reellen Achse zwischen 0 und 1 den Charakter von ganzen Funktionen haben*), überdies sind $g^*(s)$ und $h(s)$ für reelle s reell und $h(s)$ durchaus größer als eine von 0 verschiedene positive Zahl a.

Nach diesen Festsetzungen kann man eine positive Zahl m so angeben, daß

$$g^*(s)-m\,h(s)=-g(s)<-1 \tag{61}$$

für $0\leqq s\leqq 1$ wird. Wir setzen dann

$$g(0)=g_0;\quad h(0)=1,$$

*) Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, nehmen wir im folgenden an, daß $g^*(s)$ und $h(s)$ für $|s|\leqq\varrho$ sich regulär erhalten, wo $\varrho>1$ ist.

was wir durch Abänderung von λ^* in (60) von Anfang an als erreicht annehmen, ferner setzen wir $\lambda = \lambda^* + m$. Dann erhält man:

$$\frac{d}{ds} s \frac{du}{ds} + \frac{-g(s) + \lambda h(s)}{s} u = 0. \tag{61a}$$

In der Umgebung von $s = 0$ existieren 2 Fundamentallösungen:

$$u_0(s) = s^{r_1} \Pi_0(s); \quad u_1(s) = s^{r_2} \Pi_1(s); \tag{62}$$

wobei

$$r_1 = +\sqrt{g_0 - \lambda}; \quad r_2 = -\sqrt{g_0 - \lambda};$$

oder allgemein

$$r' = \pm \sqrt{g_0 - \lambda}$$

ist.

Wir müssen nun Π_0 und Π_1 als Funktionen von λ betrachten; es ist aber zweckmäßiger, r' statt λ einzuführen; dann sind für alle Werte von λ, für welche der reelle Teil von $g_0 - \lambda$ kleiner ist als $\alpha < \frac{1}{4}$, Π_0 und Π_1 analytische Funktionen von r_1 bez. r_2 und zwar vom Charakter ganzer Funktionen. Dasselbe gilt, wenn $g_0 - \lambda > 0$ ist, von derjenigen Fundamentallösung, welche zu dem Exponenten mit größerem reellen Teil gehört.

Da der Beweis dieser für das Folgende grundlegenden Aussage sich mittels der Majorantenmethode äußerst einfach ergibt, wollen wir ihn der Vollständigkeit halber kurz skizzieren.

Es sei

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n s^n, \qquad h(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n s^n,$$

dann kann man bekanntlich eine endliche Zahl M so angeben, daß

$$|g_n| < \frac{M}{\varrho^n}; \qquad |h_n| < \frac{M}{\varrho^n}.$$

Ferner sei

$$\Pi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n,$$

wobei $\Pi(s)$ zu einem der 3 Fälle, die in der Behauptung unterschieden sind, gehört. Dann ist

$$\begin{aligned} r'^2 &= g_0 - \lambda, \\ p_1[(r'+1)^2 - g_0 + \lambda] &= (g_1 - \lambda h_1) p_0, \\ p_2[4r' + 4] &= (g_2 - \lambda h_2) p_0 + (g_1 - \lambda h_1) p_1, \cdots, \\ p_m[2mr' + m^2] &= (g_m - \lambda h_m) p_0 + (g_{m-1} - \lambda h_{m-1}) p_1 + \cdots. \end{aligned}$$

In jedem der 3 Fälle ist der Faktor von p auf der linken Seite wesentlich von 0 verschieden. Wir nehmen als Majorante:

$$\bar{p}_1 = M\frac{|(1+\lambda)|p_0}{(2r'+1)\varrho},$$

$$\bar{p}_2 = \frac{|1+\lambda|M}{(4r'+4)}\left[\frac{p_0}{\varrho^2}+\frac{\bar{p}_1}{\varrho}\right], \ldots$$

$$\bar{p}_m = \frac{|1+\lambda|M}{(2mr+m^2)}\left[\frac{p_0}{\varrho^m}+\frac{\bar{p}_1}{\varrho^{m-1}}+\cdots\frac{\bar{p}_{m-1}}{\varrho}\right].$$

$$\bar{p}_{m+1} \doteq \left\{\frac{|1+\lambda|M}{|2(m+1)r+(m+1)^2|}\cdot\frac{1}{\varrho}+\frac{|2mr+m^2|}{|2(m+1)r+(m+1)^2|}\cdot\frac{1}{\varrho}\right\}\bar{p}_m.$$

Es liege nun $|\lambda|$ unterhalb einer beliebig großen, aber festen Größe λ_1, dann kann man m_1 zu gegebenem δ so groß bestimmen, daß für alle $|\lambda| < \lambda_1$

$$\left|\frac{\bar{p}_{m+1}}{p_m}\right| < \frac{1+\delta}{\varrho},$$

wenn $m \geqq m_1$ ist; d. h. aber, die Reihe für $\Pi(s)$ konvergiert gleichmäßig für alle r', für welche $|r'|$ unter einer endlichen Grenze liegt, wenn $s \leqq 1$, $\Pi(s)$ ist also nach dem bekannten Weierstraßschen Doppelreihensatz eine analytische Funktion von r'; speziell läßt sich um jedes rein imaginäre r' ein Kreis vom Radius $\geqq \frac{1}{4}$ angeben, innerhalb dessen $\Pi(s)$ als Funktion von r' den Charakter einer ganzen Funktion hat.

Sei jetzt r' rein imaginär, dann ist:

$$u_0(s) = \cos\left(\sqrt{\lambda-g_0}\,|\lg s|\right) + i\sin\left(\sqrt{\lambda-g_0}\,|\lg s|\right) + s\left(\Pi_1^*(s)+i\Pi_2^*(s)\right),$$

$$u_1(s) = \cos\left(\sqrt{\lambda-g_0}\,|\lg s|\right) - i\sin\left(\sqrt{\lambda-g_0}\,|\lg s|\right) + s\left(\Pi_1^*(s)-i\Pi_2^*(s)\right).$$

Setzen wir $\sqrt{\lambda-g_0} = r\pi$, so erhält man zwei reelle Fundamentallösungen

$$(63)\qquad \begin{cases} U_0^{(r)}(s) = \cos(r\,|\lg s|\,\pi) + s\,\mathfrak{P}_0^{(r)}(s), \\ U_1^{(r)}(s) = \sin(r\,|\lg s|\,\pi) + s\,\mathfrak{P}_1^{(r)}(s) \end{cases}$$

und $\mathfrak{P}_0^{(r)}(s)$ und $\mathfrak{P}_1^{(r)}(s)$ liegen auch für $s=0$ unterhalb einer bestimmten endlichen Grenze.

Wir bestimmen jetzt $A(r)$ und $B(r)$ so, daß, wenn

$$(63\text{a})\qquad A\,U_0^{(r)}(s) + B\,U_1^{(r)}(s) = u^{(r)}(s),$$

$$(63\text{b})\qquad u^{(r)}(1) = 0,\quad \left(\frac{du^{(r)}(s)}{ds}\right)_{s=1} = -r\pi$$

wird. Man hat also

$$A\,U_0^{(r)}(1) + B\,U_1^{(r)}(1) = 0,$$

$$A\left(\frac{dU_0^{(r)}(s)}{ds}\right)_{s=1} + B\left(\frac{dU_1^{(r)}(s)}{ds}\right)_{s=1} = -r\pi.$$

Es ist aber

$$U_0^{(r)}(1)\left(\frac{d\,U_1^{(r)}(s)}{ds}\right)_{s=1} - U_1^{(r)}(1)\left(\frac{d\,U_0^{(r)}(s)}{ds}\right)_{s=1}$$

$$= \lim_{s=0} s\left[U_0^{(r)}(s)\frac{d}{ds}(U_1^{(r)}(s)) - U_1^{(r)}(s)\frac{d}{ds}(U_0^{(r)}(s))\right] = r\pi;$$

also wird

$$A = U_1^{(r)}(1); \quad B = -\,U_0^{(r)}(1)$$

und daher schließlich

$$u^{(r)}(s) = U_1^{(r)}(1)\,U_0^{(r)}(s) - U_0^{(r)}(1)\,U_1^{(r)}(s). \tag{64}$$

Die so bestimmten Koeffizienten sind nach dem früheren vom Charakter ganzer Funktionen von r für die hier in Betracht kommenden Werte von r.

Wir suchen jetzt uns ein Bild von der Verteilung der Eigenwerte $\lambda^{(\varepsilon)}$ zu machen, welche zu Eigenfunktionen gehören, die in $s=\varepsilon$ und $s=1$ verschwinden. Die Festlegung der Eigenwerte $\lambda^{(\varepsilon)}$ geschieht bekanntlich vermittelst der Sturmschen Sätze*), welche lehren, daß man $\lambda^{(\varepsilon)}$ auf eine und nur eine Weise so bestimmen kann, daß die dazu gehörige Eigenfunktion außer in ε und 1 noch in m Punkten zwischen ε und 1 verschwindet; m heißt nach Herrn Klein**) *Oszillationszahl*, der Satz selbst *Oszillationstheorem.****)

Am anschaulichsten wird die Sachlage, wenn wir uns der geometrischen Darstellung bedienen, indem wir s als Abszisse und die Funktion $y = -g(s) + \lambda h(s)$ für die verschiedenen Werte von λ als Ordinate gezeichnet denken.

Ist $\lambda = 0$, so ist $y = y^{\times} = -g(s)$; wir erhalten dann für y^* eine Kurve, die ganz unterhalb der Geraden $y = -1$ liegt. Wächst λ, so rückt die Kurve nach oben, und es existieren sicher für jeden Bereich $(\varepsilon, 1)$ so lange keine Eigenwerte, bis die Kurve die s-Achse schneidet. Gehört dann zu zwei Lagen der Kurve je ein Eigenwert für den Bereich $(\varepsilon, 1)$, so gehört zu der höher gelegenen Kurve die größere Oszillationszahl; gehören zwei Kurven bei verschiedenen Bereichen zu derselben

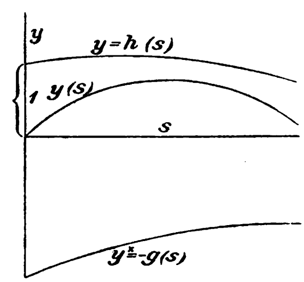


Fig. 1.

*) Journal de Math. 1. Vergl. auch M. Bôcher, N. Y. Bull. 1898; Encyklopädie II A 7 a; E. Picard, Traité d'Analyse III; ferner die Arbeit des Verfassers in den Jahresberichten 1907.

**) Göttinger Nachrichten 1890.

***) Bez. der Entwicklung nach den hierher gehörigen Eigenfunktionen vergl. auch die Arbeiten von A. Kneser in den Math. Ann. Bd. 58 und 60.

Oszillationszahl, so gehört zu dem kleineren Bereiche die höher gelegene Kurve.

Es sind jetzt zwei typische Fälle zu unterscheiden, je nachdem für $\lambda = g_0$ die in $s = 0$ endliche Lösung zwischen $s = 0$ und $s = 1$ m Nullstellen oder keine Nullstelle besitzt. Für $\lambda = g_0$ geht die in Fig. 1 gezeichnete Kurve $y(s)$ durch den Koordinatenanfangspunkt und aus den eben zitierten Sätzen folgt dann im ersten Falle, daß es für den Bereich $(0, 1)$ m Eigenwerte $< g_0$ gibt; man kann ferner ε so klein wählen, daß auch für den Bereich $(\varepsilon, 1)$ m Eigenwerte $< g_0$ existieren. Im zweiten Fall sind alle Eigenwerte für den Bereich $(0, 1)$ und daher auch für jeden Bereich $(\varepsilon, 1) > g_0$.

Wenn jetzt aber $\lambda > g_0$ ist, tritt (63) in Kraft. Wir behaupten, daß man dann ε so klein wählen kann, daß der *Unterschied zwischen zwei Werten r, die zu aufeinanderfolgenden Eigenwerten für den Bereich* $(\varepsilon, 1)$ *gehören, gleich* $\frac{1 + \varepsilon M}{|\lg \varepsilon|}$ *wird, wobei* $|M|$ *für jedes noch so kleine* ε *unterhalb einer festen endlichen Größe* M_1 *liegt*, wenn $\lambda < \lambda'$; dabei kann λ' beliebig groß vorgegeben werden; die Ungleichung gilt also für alle $r < N$, wenn $N = \sqrt{\lambda' - g_0}$ ist.

Dieser wichtige Satz folgt unmittelbar daraus, daß die Oszillationen von $u^{(r)}(s)$ für kleine s wesentlich bestimmt sind durch die beiden Glieder

$$A(r) \cos (r\,|\lg s|\,\pi) + B(r) \sin (r\,|\lg s|\,\pi).$$

Um dies im einzelnen durchzuführen, bemerken wir zunächst, daß für $r < N$ $A(r)$ und $B(r)$ nur in einer endlichen Anzahl von Stellen verschwinden, und zwar liegen die Nullstellen von $A(r)$ getrennt von denjenigen von $B(r)$, da $U_1^{(r)}(1)$ und $U_2^{(r)}(1)$ nicht gleichzeitig verschwinden, es sei denn für $r = 0$.

Sollte nun für $r = 0$ die in $s = 0$ endliche Lösung der Differentialgleichung auch in $s = 1$ verschwinden, so schließen wir $r = 0$ durch ein beliebig kleines Intervall aus, wodurch dann die folgende Untersuchung nicht wesentlich geändert wird. Dann kann man eine endliche Zahl d so angeben, daß, für alle $r < N$, $\left|\sqrt{(A(r))^2 + (B(r))^2}\right| \geqq d$ ist.

Ebenso läßt sich eine endliche Zahl b so angeben, daß für $0 \leqq s \leqq 1$, $r \leqq N$

$$|A\mathfrak{P}_0^{(r)}(s)| \leqq b, \quad |B\mathfrak{P}_0^{(r)}(s)| \leqq b,$$

$$\left|\left(\frac{dA(r)}{dr}\right)\right| \leqq b, \quad \left|\left(\frac{dB(r)}{dr}\right)\right| \leqq b, \quad \left|s^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dr} A\mathfrak{P}_0^{(r)}(s)\right| \leqq b, \quad \left|s^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dr} B\mathfrak{P}_1^{(r)}(s)\right| \leqq b,$$

wobei der Exponent $\frac{1}{2}$ an Stelle irgend eines anderen willkürlichen positiven Exponenten gesetzt ist. Es sei nun

$$\mathsf{A}(r) + \varepsilon \mathsf{B}(r) = u^{(r)}(\varepsilon),$$

dabei ist

$$\mathsf{A}(r) = A(r) \cos(r\pi\,|\lg \varepsilon|) + B(r) \sin(r\pi\,|\lg \varepsilon|),$$
$$\mathsf{B}(r) = A(r)\,\mathfrak{P}_0^{(r)}(\varepsilon) + B(r)\,\mathfrak{P}_1^{(r)}(\varepsilon),$$

ferner sei für ein bestimmtes $r^{(1)}$

$$\mathsf{A}(r^{(1)}) = 0.$$

Wir setzen dann

$$r^{(2)} = r^{(1)} + \frac{M_2\,\varepsilon}{|\lg \varepsilon|}$$

und behaupten, daß man M_2 so bestimmen kann, daß

$$u^{(r^{(2)})}(\varepsilon) = 0 \quad \text{und} \quad |M_2| < \frac{M_1}{3}$$

ist, wobei M_1 eine für alle $r < N$ feste, endliche Zahl bedeutet.

In der Tat erhält man

$$u^{(r^{(2)})}(\varepsilon) = -A(r^{(1)}) \sin(r^{(1)}\pi\,|\lg \varepsilon|)\, M_2\,\varepsilon\pi$$
$$+ B(r^{(1)}) \cos(r^{(1)}\,|\lg \varepsilon|\,\pi)\, M_2\,\varepsilon\pi + R,$$

wobei

$$|R| \leqq 2b M_2 \frac{\varepsilon}{|\lg \varepsilon|} + 2b\varepsilon$$

ist. Wenn ε klein genug ist, kann man, da

$$|-A(r^{(1)}) \sin(r^{(1)}\pi\,|\lg \varepsilon|) + B(r^{(1)}) \cos(r^{(1)}\pi\,|\lg \varepsilon|)|$$
$$= \left|\sqrt{(A(r^{(1)}))^2 + (B(r^{(1)}))^2}\right| \geqq d$$

ist, eine für alle $r^{(1)} < N$ endliche Zahl M_1 so angeben, daß, wenn sich M_2 von $-\frac{M_1}{3}$ bis $+\frac{M_1}{3}$ bewegt, $u^{(r^{(2)})}(\varepsilon)$ das Zeichen wechselt.

Also erhält man auf diese Weise auch das gesuchte M_2, für welches $u^{(r^{(2)})}(\varepsilon) = 0$ ist.

Genau so zeigt man, daß man in

$$r^{(3)} = r^{(1)} + \frac{1 + M_3\,\varepsilon}{|\lg \varepsilon|}$$

M_3 so bestimmen kann, daß $|M_3| < \frac{M_1}{3}$ ist und $\mathsf{A}(r^{(3)}) = 0$ wird.

Dann folgt, wie früher, daß $u^{(r^{(4)})}(\varepsilon) = 0$ wird, wenn

$$r^{(4)} = r^{(3)} + \frac{M_4\,\varepsilon}{|\lg \varepsilon|}.$$

Es ist also

$$r^{(4)} - r^{(2)} = \frac{1}{|\lg \varepsilon|} + \frac{\varepsilon}{|\lg \varepsilon|} \cdot (M_4 + M_3 - M_2) = \frac{1 + \varepsilon M}{|\lg \varepsilon|},$$

wobei M eine Größe ist, für welche $|M| \leqq M_1$ ist, wie klein auch ε sein mag; damit ist die obige Behauptung bewiesen.

Aus der Ableitung folgt auch unmittelbar, daß zwischen $r^{(2)}$ und $r^{(4)}$ kein zu einem Eigenwerte λ gehöriges r liegt.

Aus der so gewonnenen Abschätzung folgt jetzt, daß, wenn ε nach 0 konvergiert, *die Eigenwerte λ, welche $> g_0$ sind, sich zu einem kontinuierlichen Streckenspektrum verdichten werden, während die m Eigenwerte*

$$\lambda_p < g_0 \quad \textit{für} \quad p = 1 \cdots m$$

ein Punktspektrum geben.

§ 2.

Einige Sätze über das Verhalten der Greenschen Funktion.

Nachdem wir uns jetzt über die Verteilung der Eigenwerte orientiert haben, verfahren wir analog wie im Kapitel I und bilden zunächst die Greensche Funktion $G_2^{(\varepsilon)}(st)$, die für $s = \varepsilon$ und $s = 1$ verschwindet, und der Differentialgleichung:

$$\frac{d}{ds} s \frac{du}{ds} - \frac{g(s)}{s} u = 0 \tag{65}$$

genügt. $G_2^{(\varepsilon)}(st)$ läßt sich jetzt natürlich nicht mehr so einfach wie im letzten Kapitel darstellen, jedoch läßt es sich mit dem in Kapitel I § 1 definierten $G'_\varepsilon(st)$, für welches wir jetzt zum Unterschiede $G_1^{(\varepsilon)}(st)$ schreiben, leicht vergleichen.

Wir können diesen Vergleich auf zweierlei Weise durchführen, einmal vermittelst des durch Formel (6) gegebenen Greenschen Satzes, das zweite Mal direkt vermittelst der Definition der Greenschen Funktion.

Die erste Methode ist der Ausdehnung auf die Potentialtheorie fähig, die zweite ist sehr anschaulich; wir werden daher beide hier durchführen.

Wir setzen also bei der ersten Art der Beweisführung in (6)

$$p = s,\ q = 0,\ v = G_2^{(\varepsilon)}(st),\ u = G_1^{(\varepsilon)}(s\sigma),\ a = \varepsilon,\ b = 1,$$

dann erhält man unter Berücksichtigung der Unstetigkeit der ersten Ableitung der Greenschen Funktion:

$$\int_\varepsilon^1 G_2^{(\varepsilon)}(st)\, G_1^{(\varepsilon)}(s\sigma)\,(1 - g(s))\,\frac{ds}{s} = G_2^{(\varepsilon)}(\sigma t) - G_1^{(\varepsilon)}(\sigma t). \tag{66}$$

Nun wechseln $G_1^{(\varepsilon)}(s\sigma)$ und $G_2^{(\varepsilon)}(st)$ ihr Zeichen nicht zwischen 0 und 1 und sind, wie aus der Festlegung der Unstetigkeit der ersten Ableitung folgt, beide positiv, ferner ist nach (61) $g(s)$ immer größer als 1; es folgt also aus (66)

$$G_2^{(\varepsilon)}(\sigma t) \leqq G_1^{(\varepsilon)}(\sigma t). \tag{67}$$

Da ferner $G_2^{(\varepsilon)}(\sigma t)_{\sigma=\varepsilon} = 0$ und auch $G_1^{(\varepsilon)}(\sigma t)_{\sigma=\varepsilon} = 0$, so folgt aus (67)

$$\left(\frac{d G_2^{(\varepsilon)}(\sigma t)}{d\sigma}\right)_{\sigma=\varepsilon} < \left(\frac{d}{d\sigma} G_1^{(\varepsilon)}(\sigma t)\right)_{\sigma=\varepsilon}. \tag{68}$$

Seien nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ irgend zwei Größen kleiner als 1 und $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, dann ist:

$$|G_2^{(\varepsilon_1)}(st) - G_2^{(\varepsilon_2)}(st)| \leqq |G_1^{(\varepsilon_1)}(st) - G_1^{(\varepsilon_2)}(st)|. \tag{69}$$

Denn es ist wieder nach dem Greenschen Satze:

$$G_2^{(\varepsilon_1)}(st) - G_2^{(\varepsilon_2)}(st) = \varepsilon_2\, G_2^{(\varepsilon_1)}(\varepsilon_2 t)\left(\frac{d}{ds}\, G_2^{(\varepsilon_2)}(s\,t)\right)_{s=\varepsilon_2},$$

$$G_1^{(\varepsilon_1)}(st) - G_1^{(\varepsilon_2)}(st) = \varepsilon_2\, G_1^{(\varepsilon_1)}(\varepsilon_2 t)\left(\frac{d}{ds}\, G_1^{(\varepsilon_2)}(s\,t)\right)_{s=\varepsilon_2}.$$

Und aus (67) und (68) folgt jetzt unmittelbar (69), da alle auftretenden Größen positiv sind. Daraus folgt aber die Existenz von

$$\lim_{\varepsilon=0} G_2^{(\varepsilon)}(st) = G_2(st)$$

und es ist

(70) $\quad G_2(st) \leqq G_1(st);\quad |G_2(st) - G_2^{(\varepsilon)}(st)| \leqq |G_1(st) - G_1^{(\varepsilon)}(st)|.$

Wir leiten jetzt diese Formeln nach der zweiten Methode ab.

Wir gehen durch die Substitution $s = e^{-x}$ auf die Gleichung:

(71) $\quad \frac{d^2}{dx^2}u(e^{-x}) - g(e^{-x})\,u(e^{-x}) = 0 \quad$ bzw. $\quad \frac{d^2}{dx^2}u(e^{-x}) - u(e^{-x}) = 0$

zurück; unser Intervall für x erstreckt sich wieder von 0 bis $|\lg \varepsilon|$. Dann folgt aus (71) unter Berücksichtigung von (61), daß, wenn $G_1^{(\varepsilon)}$ und $G_2^{(\varepsilon)}$ für irgend ein x denselben Wert haben, $\frac{d\,G_2^{(\varepsilon)}}{dx}$ an dieser Stelle stärker wächst als $\frac{d\,G_1^{(\varepsilon)}}{dx}$ *). Wenn also für $x = 0$

$$\frac{d\,G_2^{(\varepsilon)}}{dx} > \frac{d\,G_1^{(\varepsilon)}}{dx}$$

wäre, so wäre durchaus

$$\frac{d\,G_2^{(\varepsilon)}}{dx} > \frac{d\,G_1^{(\varepsilon)}}{dx},$$

da beide Funktionen an der Sprungstelle um gleich viel abnehmen. Dann wäre aber durchaus $G_2^{(\varepsilon)} > G_1^{(\varepsilon)}$ und es könnten nicht beide für $x = |\lg \varepsilon|$ verschwinden. Es ist also

$$\frac{d\,G_2^{(\varepsilon)}}{dx} \leqq \frac{d\,G_1^{(\varepsilon)}}{dx}$$

für $x = 0$.

Wenn dann in einem Punkte zwischen $x = 0$ und $x = |\lg \varepsilon|$ G_2 und G_1 denselben Wert annehmen würden, so wäre hier auch:

$$\frac{d\,G_2^{(\varepsilon)}}{dx} > \frac{d\,G_1^{(\varepsilon)}}{dx}$$

und wir kommen auf denselben Widerspruch wie oben.

Es ist also immer $G_2^{(\varepsilon)} < G_1^{(\varepsilon)}$, wenn s und t im Inneren des Intervalles liegen.

---

*) t nehmen wir im folgenden zunächst als fest und im Inneren des Intervalles gelegen an.

Ferner ist für $x = |\lg \varepsilon|$

$$\frac{d G_2^{(\varepsilon)}}{dx} > \frac{d G_1^{(\varepsilon)}}{dx},$$

also:

$$\left(\frac{d}{ds} G_2^{(\varepsilon)}(st)\right)_{s=\varepsilon} < \left(\frac{d}{ds} G_1^{(\varepsilon)}(st)\right)_{s=\varepsilon};$$

damit ist (67) und (68) bewiesen.

Überdies sind $G_2^{(\varepsilon_1)} - G_2^{(\varepsilon_2)}$ und $G_1^{(\varepsilon_1)} - G_1^{(\varepsilon_2)}$ stetige Funktionen mit stetigen Ableitungen und verschwinden für $x = 0$; für $x = |\lg \varepsilon_2|$ ist

$$G_2^{(\varepsilon_2)} = 0, \quad G_1^{(\varepsilon_2)} = 0,$$

ferner nach (67)

$$G_2^{(\varepsilon_1)} < G_1^{(\varepsilon_1)},$$

also ist für $x = |\lg \varepsilon_2|$

$$G_2^{(\varepsilon_1)} - G_2^{(\varepsilon_2)} < G_1^{(\varepsilon_1)} - G_1^{(\varepsilon_2)}$$

und da $G_2^{(\varepsilon_1)} - G_2^{(\varepsilon_2)}$ in höchstens zwei Punkten gleich $G_1^{(\varepsilon_1)} - G_1^{(\varepsilon_2)}$ werden kann, wie aus dem früheren hervorgeht, so folgt, daß durchaus zwischen $x = 0$ und $x = |\lg \varepsilon_2|$

$$G_2^{(\varepsilon_1)} - G_2^{(\varepsilon_2)} < G_1^{(\varepsilon_1)} - G_1^{(\varepsilon_2)},$$

das ist aber die zu beweisende Gleichung (69).

§ 3.

Die Aufstellung der Integralgleichung und der dazu gehörigen quadratischen Form. Die sich daran anschließende Darstellung willkürlicher Funktionen.

Die Eigenfunktionen von (61a) für das Intervall $(\varepsilon, 1)$ genügen der Integralgleichung

$$0 = \psi_\varepsilon(s) - \lambda \int_\varepsilon^1 G_2^{(\varepsilon)}(st)\, h(t)\, \psi_\varepsilon(t) \frac{dt}{t}. \tag{72}$$

Wir setzen dann:

$$\varphi_\varepsilon(s) = \frac{\sqrt{h(s)}}{\sqrt{s}} \psi_\varepsilon(s), \quad \text{wenn} \quad s \geqq \varepsilon, \tag{73}$$

$$\varphi_\varepsilon(s) = 0, \quad \text{wenn} \quad s \leqq \varepsilon;$$

$$K_2^{(\varepsilon)}(st) = \frac{G_2^{(\varepsilon)}(st)\sqrt{h(t)}\sqrt{h(s)}}{\sqrt{s}\sqrt{t}}, \quad \text{wenn} \quad s \geqq \varepsilon,\ t \geqq \varepsilon, \tag{74}$$

$$K_2^{(\varepsilon)}(st) = 0, \quad \text{wenn} \quad s \leqq \varepsilon \text{ oder } t \leqq \varepsilon$$

ist, so daß also:

$$0 = \varphi_\varepsilon(s) - \lambda \int_0^1 K_2^{(\varepsilon)}(st)\, \varphi_\varepsilon(t)\, dt. \tag{75}$$

Wir bilden jetzt die quadratische Form:

(76) $$K_2^{(\varepsilon)}(xy) = \sum_{p,q} k_{pq}^{\varepsilon,2}\, x_p y_q\,,$$

wobei

$$k_{pq}^{\varepsilon,2} = \int_0^1\!\!\int_0^1 2K_2^{(\varepsilon)}(st)\sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\,ds\,dt$$

ist.

Da nun aus der obigen Untersuchung über die Verteilung der Eigenwerte folgt, daß der kleinste Eigenwert oberhalb einer von 0 verschiedenen, von ε unabhängigen Größe bleibt, so schließen wir genau wie in Kap. I, § 3, daß $K_2^{(\varepsilon)}(xy)$ mit nach 0 abnehmendem ε gegen eine beschränkte quadratische Form $K_2(xy)$ konvergiert, wenn man für jedes endliche n und vorgegebene δ

$$\left| k_{pq}^{(2)} - k_{pq}^{\varepsilon,2} \right| < \frac{\delta}{n^2}$$

machen kann, wenn $p \leqq n$, $q \leqq n$ ist.

Nun ist

$$\left| k_{pq}^{(2)} - k_{pq}^{\varepsilon,2} \right| = \left| \int_0^1\!\!\int_0^1 2\frac{\left(G_2(st) - G_2^{(\varepsilon)}(st)\right)}{\sqrt{s}\sqrt{t}} \sqrt{h(s)}\sqrt{h(t)}\sin(p\pi s)\sin(q\pi t)\,ds\,dt \right|$$

$$\leqq \operatorname{Max}|h(s)| \int_0^1\!\!\int_0^1 2\frac{|G_2(st) - G_2^{(\varepsilon)}(st)|}{\sqrt{s}\sqrt{t}}\,ds\,dt$$

$$\leqq \operatorname{Max}|h(s)| \int_0^1\!\!\int_0^1 2\frac{|G_1(st) - G_1^{(\varepsilon)}(st)|}{\sqrt{s}\sqrt{t}}\,ds\,dt,$$

und da $\operatorname{Max}|h(s)|$ eine endliche Zahl ist, so folgt aus (9) unmittelbar die Behauptung, also

(77) $$\lim_{\varepsilon=0} K_2^{(\varepsilon)}(xy) = K_2(xy).$$

Es ist jetzt wieder $K_2(xy)$ in der in VIII gegebenen Normalform darzustellen.

Die ersten m Eigenwerte $\lambda_p^{(\varepsilon)}$, welche kleiner sind als g_0, konvergieren mit abnehmendem ε gegen die λ_p, wie man sich leicht überzeugt; ebenso konvergieren die dazugehörigen normierten Eigenfunktionen $\overline{\varphi}_p^{(\varepsilon)}(s)$ und Eigenformen $\overline{L}_p^{(\varepsilon)}(x)$ gegen $\overline{\varphi}_p(s)$ und $\overline{L}_p(x)$, und zwar ist auch $\overline{L}_p(x)$ eine beschränkte Linearform, da ja alle $\lambda_p < g_0$ angenommen wurden.

Es sei aber jetzt $\sqrt{\lambda - g_0} = r\pi$ wieder reell, und $u_\varepsilon^{(r)}(s)$ sei eine Eigenfunktion von (61a), die zum Bereiche $(\varepsilon, 1)$ gehört. $u_\varepsilon^{(r)}(s)$ entspricht als normierte Eigenfunktion von (75):

$$\bar{\varphi}_\varepsilon^{(r)}(s) = \frac{u_\varepsilon^{(r)}(s)\sqrt{h(s)}}{\sqrt{s}\sqrt{\int\limits_\varepsilon^1 \frac{h(s)}{s}\left(u_\varepsilon^{(r)}(s)\right)^2 ds}} \quad \text{für } s > \varepsilon$$

$$\bar{\varphi}_\varepsilon^{(r)}(s) = 0 \text{ für } s < \varepsilon.$$

Nun ist

$$h(s) = 1 + s h_1(s)$$

und man erhält aus (64)

$$\begin{aligned}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{h(s)}{s}\left(u_\varepsilon^{(r)}(s)\right)^2 ds = & \int\limits_\varepsilon^1 \left(U_1^{(r)}(1)\right)^2 \cos^2(r\,|\lg s|\,\pi)\frac{ds}{s} \\ & + \int\limits_\varepsilon^1 \left(U_0^{(r)}(1)\right)^2 \sin^2(r\,|\lg s|\,\pi)\frac{ds}{s} \\ & - 2\, U_0^{(r)}(1)\, U_1^{(r)}(1) \int\limits_\varepsilon^1 \sin(r\,|\lg s|\,\pi)\cos(r\,|\lg s|\,\pi)\frac{ds}{s} \\ & + \int\limits_\varepsilon^1 q(s)\, ds,\end{aligned}$$

wobei $q(s)$ eine Funktion bedeutet, die für alle $r < N$ und alle ε, also auch für $\varepsilon = 0$ unterhalb einer festen Grenze liegt. Bezeichnen wir jetzt vorübergehend mit M und M' Größen, die ebenfalls für alle ε und für $r < N$ unter einer festen Grenze liegen, so folgt

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{h(s)}{s}\left(u_\varepsilon^{(r)}(s)\right)^2 ds = \frac{1}{2}\left[\left(U_1^{(r)}(1)\right)^2 + \left(U_0^{(r)}(1)\right)^2\right]|\lg \varepsilon| + M,$$

also

$$\bar{\varphi}_\varepsilon^{(r)}(s) = \frac{u_\varepsilon^{(r)}(s)\sqrt{h(s)}}{\sqrt{s}\sqrt{\frac{1}{2}|\lg\varepsilon|\left(\left(U_0^{(r)}(1)\right)^2 + \left(U_1^{(r)}(1)\right)^2\right)}\sqrt{1+\frac{M'}{|\lg(\varepsilon)|}}}. \tag{78}$$

Für die zu $\bar{\varphi}_\varepsilon^{(r)}(s)$ gehörige Linearform

$$\bar{L}_r^{(\varepsilon)}(x) = \sum_p \bar{l}_{p,r}^{(\varepsilon)} x_p$$

ist analog zu Kap. I, § 3

$$\begin{aligned}\bar{l}_{p,r}^{(\varepsilon)} & = \int\limits_0^1 \sqrt{2}\,\bar{\varphi}_\varepsilon^{(r)}(s)\sin(p\pi s)\, ds \\ & = \frac{l_{p,r}^{(\varepsilon)}}{\sqrt{\frac{1}{2}|\lg\varepsilon|\left(\left(U_0^{(r)}(1)\right)^2 + \left(U_1^{(r)}(1)\right)^2\right)}\sqrt{1+\frac{M'}{|\lg\varepsilon|}}}\end{aligned}$$

und

$$L_r^{(\varepsilon)}(x) = \sum_p l_{p,r}^{(\varepsilon)} x_p.$$

Es ist also

(79)
$$K_\varepsilon(xx) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(L_i^{(\varepsilon)}(x))^2}{\lambda_i^{(\varepsilon)}}$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2\,(L_{r_i}^{(\varepsilon)}(x))^2}{\left((U_0^{(r_i)}(1))^2 + (U_1^{(r_i)}(1))^2\right)|\lg\varepsilon|\left(g_0 + \left(\frac{i(1+\varepsilon M^{(i)})}{|\lg\varepsilon|}\right)^2\pi^2\right)\cdot\sqrt{1+\frac{M'}{|\lg\varepsilon|}}},$$

wobei in der zweiten Summe für λ_i, entsprechend den Ausführungen auf S. 37,

$$g_0 + \left(\frac{i(1+\varepsilon M^{(i)})}{|\lg\varepsilon|}\right)^2\pi^2$$

gesetzt wurde und nach früherem $|M^{(i)}| < M_1$ ist, wenn $r_i < N$.

Führen wir nun hier den Grenzübergang, unter Berücksichtigung des am Anfang dieses Paragraphen abgeleiteten Hilfssatzes, analog durch wie bei der Ableitung*) von (39), so finden wir, wenn $\sum_i |x_i|$ konvergiert,

(80)
$$K(xx) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(L_i(x))^2}{\lambda_i} + 2\int_0^\infty \frac{(L_r(x))^2}{\left((U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2\right)(g_0 + r^2\pi^2)}\,dr.$$

Man kann nun für die $k_{pq}^{(2)}$ dieselben Eigenschaften ableiten wie für die $k_{pq}^{(1)}$; indem man die Schlüsse des Kapitel I wiederholt, findet man

(81)
$$\mathsf{K}_2(\lambda; xx) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(L_i(x))^2}{1-\frac{\lambda}{\lambda_i}} + 2\int_0^\infty \frac{(L_r(x))^2}{\left((U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2\right)\left(1-\frac{\lambda}{g_0+r^2\pi^2}\right)}\,dr$$
$$+ E_2(xx).$$

Wir setzen $\lambda = 0$ und erhalten (xx) und daraus

(82)
$$(xy) = \sum_{i=1}^{m} L_i(x)\,L_i(y) + 2\int_0^\infty \frac{L_r(x)\,L_r(y)\,dr}{(U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2} + E(xy).$$

Wählen wir wieder**)

$$x_p = \sqrt{2}\int_0^1 \gamma(t)\sin(p\pi t)\,dt;\quad y_q = \sqrt{2}\int_0^1 K_2(st)\sin(q\pi t)\,dt = k_q^{(2)}(s),$$

---

*) Vgl. speziell Anm. 1 S. 16.

**) $K_2(st)$ ist hier wieder zum Unterschiede von $K(st)$ im Kap. I geschrieben und ist nicht zu verwechseln mit dem dort definierten $K^{(2)}(st)$.

so wird $E(xy) \equiv 0$ und man erhält, wenn $\gamma(t)$ in 0 und 1 verschwindet und eine erste Ableitung besitzt, die den Dirichletschen Bedingungen genügt:

$$f_1(s) = \int_0^1 K_2(st)\gamma(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m}\int_0^1 f_1(t)\,\overline{\varphi}_i(t)\,dt\,\overline{\varphi}_i(s)$$

$$+ 2\int_0^\infty dr\,\frac{u^{(r)}(s)\sqrt{h(s)}}{\sqrt{s}}\int_0^1 \frac{f_1(t)\,u^{(r)}(t)\sqrt{h(t)}\,dt}{\sqrt{t}\left((U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2\right)}.$$

Setzt man dann:

$$f(s) = \frac{\sqrt{s}\,f_1(s)}{\sqrt{h(s)}} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{h(s)}}\cdot\int_0^1 K_2(st)\gamma(t)\,dt,$$

so erhält man:

$$(83)\qquad f(s) = \sum_{i=1}^{m}\overline{\psi}_i(s)\int_0^1 f(t)\,\overline{\psi}_i(t)\,h(t)\,\frac{dt}{t}$$

$$+ 2\int_0^\infty dr\,u^{(r)}(s)\int_0^1 \frac{f(t)\,u^{(r)}(t)\,h(t)}{\left((U_0^{(r)}(1))^2 + (U_1^{(r)}(1))^2\right)}\,\frac{dt}{t}.$$

Dabei sind $\overline{\psi}_i(t)$ für $i = 1$ bis $i = m$ die m normierten Eigenfunktionen von (61a), welche in $t = 0$ und $t = 1$ verschwinden und für die

$$\int_0^1 (\overline{\psi}_i(t))^2\,h(t)\,\frac{dt}{t} = 1,\qquad \int_0^1 h(t)\,\overline{\psi}_i(t)\,\overline{\psi}_k(t)\,\frac{dt}{t} = 0$$

ist.

$u^{(r)}(t)$ ist in (64) definiert. Nun ist wieder wie in Kapitel I, § 6, wenn $f(t)$ für $t = 0$ und $t = 1$ verschwindet:

$$f(s) = \int_0^1 G_2(st)\frac{\sqrt{h(t)}}{\sqrt{t}}\gamma(t)\,dt,$$

also

$$-\frac{\sqrt{h(t)}}{\sqrt{t}}\gamma(t) = \frac{d}{dt}\,t\,\frac{d}{dt}f(t) - \frac{g(t)\,f(t)}{t}$$

und $\gamma(t)$ muß die oben angegebenen Eigenschaften besitzen.

Der Beweis für die Existenz einer Lösung der inhomogenen Integralgleichung:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda\int_0^1 K(st)\,\varphi(t)\,dt$$

ergibt sich ebenso wie in Kapitel I, § 7, wenn λ kleiner ist als der kleinste Eigenwert λ_1.

Kapitel III.

Der Wirtingersche Fall.

§ 1.

Die Verteilung der Eigenwerte. Untersuchungen über die Eigenfunktionen.

Das Resultat des letzten Kapitels war wesentlich von der Annahme abhängig, daß $h(s)$ sich in der Umgebung von $s = 0$ regulär verhält und einen von 0 verschiedenen Wert besitzt. Ganz anders aber ist die Verteilung des Spektrums, wenn $h(0) = 0$ ist oder wenn $h(s)$ sich in der Umgebung von $s = 0$ nicht regulär verhält, also sich z. B. verhält wie $(\sin(\lg s))^2 + 1$.

Nehmen wir zunächst an, $h(s)$ verschwinde für $s = 0$ derart, daß

$$\int_0^1 \frac{|h(s)|}{s} ds$$

einen endlichen Wert besitzt. Dann ist

$$\int_0^1\int_0^1 (K_2(st))^2 ds\,dt = \int_0^1\int_0^1 \frac{(G_2(st))^2 h(s) h(t)}{s \cdot t} ds\,dt$$

und dieses Integral hat nach (9) und (70) unter der obigen Voraussetzung einen endlichen Wert.

Dann folgt aber aus VI und VII, daß $K_2(xy)$ vollstetig ist und daß zu $K_2(xy)$ nur ein Punktspektrum gehört, das sich nur gegen das Unendliche häuft.

Ganz anders liegt aber wieder die Sache in dem von Herrn Wirtinger*) angeregten Falle, den wir jetzt durchführen wollen, jedoch wieder nur unter der Annahme *eines singulären* Punktes, der alles Wesentliche liefert, damit wir uns auf Kap. I stützen können. Wir gehen von der Gleichung aus:

$$(84) \qquad \frac{d^2 y}{dz^2} + \lambda h(z) y = 0.$$

Dabei sei $h(z)$ eine gerade periodische Funktion mit der Periode $2l$. (Die Annahme, daß $h(z)$ gerade ist, welche wir im Anschluß an Wirtinger treffen, ist für die ganze Entwickelung unwesentlich, jedoch treten dabei die Eigentümlichkeiten des allgemeinen Falles in besonders übersichtlicher Form zu Tage.)

*) Mathematische Annalen 48, S. 387.

$y_1(z, \lambda)$ und $y_2(z, \lambda)$ seien ein solches Fundamentalsystem, daß

$$(85)\quad y_1(0, \lambda) = 0, \quad \left(\frac{dy_1(z, \lambda)}{dz}\right)_{z=0} = 1, \quad y_1(+z) = -y_1(-z),$$
$$y_1'(z) = y_1'(-z);$$

$$(86)\quad y_2(0, \lambda) = 1, \quad \left(\frac{dy_2(z, \lambda)}{dz}\right)_{z=0} = 0, \quad y_2(+z) = y_2(-z),$$
$$y_2'(z) = -y_2'(-z);$$

$$(87)\quad y_1 y_2' - y_2 y_1' = -1$$

ist. Es gibt aber bekanntlich im allgemeinen ein anderes Fundamentalsystem Y_1, Y_2, für welches

$$(88)\quad Y_1(z + 2l) = \varrho_1 Y_1(z); \quad Y_2(z + 2l) = \varrho_2 Y_2(z).$$

Um dieses System zu erhalten, setzen wir:

$$Y = \alpha y_1 + \beta y_2;$$

dann hat man zur Bestimmung von ϱ, α, β unter Berücksichtigung von (85) und (86) die Gleichungen

$$(89)\quad \begin{aligned} \alpha y_1(l, \lambda) + \beta y_2(l, \lambda) &= \varrho(-\alpha y_1(l, \lambda) + \beta y_2(l, \lambda)), \\ \alpha y_1'(l, \lambda) + \beta y_2'(l, \lambda) &= \varrho(\alpha y_1'(l, \lambda) - \beta y_2'(l, \lambda)). \end{aligned}$$

Soll diese Gleichung für α und β möglich sein, so muß ϱ der Gleichung genügen:

$$y_1(l, \lambda)(1 + \varrho)^2 y_2'(l, \lambda) - y_2(l, \lambda)(1 - \varrho)^2 y_1'(l, \lambda) = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (87) findet man

$$\varrho^2 - 2\varrho\,[y_1(l, \lambda)\, y_2'(l, \lambda) + y_1'(l, \lambda)\, y_2(l, \lambda)] + 1 = 0.$$

$$(90)\quad \varrho = y_1(l,\lambda)\, y_2'(l,\lambda) + y_1'(l,\lambda)\, y_2(l,\lambda) \pm 2\sqrt{y_1(l, \lambda)\, y_2(l, \lambda)\, y_1'(l, \lambda)\, y_2'(l, \lambda)}.$$

Jeder dieser beiden Werte ϱ liefert ein Wertepaar α, β und damit je eine Fundamentallösung, vorausgesetzt, daß die beiden Werte ϱ_1 und ϱ_2 nicht zusammenfallen.

Dies kann jedoch nach (90) nur für solche Werte λ eintreten, die im Endlichen isoliert liegen und sich nur im Unendlichen häufen; für diese λ bedarf es einer besonderen Untersuchung, die später durchgeführt wird.

Wir gehen jetzt darauf aus, diejenigen Eigenwerte von (84) zu bestimmen, zu denen Eigenfunktionen gehören, die in $-l$ und $2kl - l$ verschwinden. Eine solche noch nicht normierte Eigenfunktion $y_k(z, \lambda)$ läßt sich dann im allgemeinen darstellen in der Form:

$$(91)\quad y_k(z, \lambda) = a\, Y_1(z, \lambda) + b\, Y_2(z, \lambda),$$

wobei dann

(91a) $$y_k(-l,\lambda) = a\,Y_1(-l,\lambda) + b\,Y_2(-l,\lambda) = 0$$

(91b) $$y_k(2kl-l,\lambda) = a\varrho_1^k\,Y_1(-l,\lambda) + b\varrho_2^k\,Y_2(-l,\lambda) = 0$$

sein muß.

Wenn also weder $Y_1(-l,\lambda)$ noch $Y_2(-l,\lambda)$ verschwindet, so muß

$$\varrho_1^k = \varrho_2^k$$

sein und da

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = 1$$

ist, so folgt

$$\varrho_1^{2k} = \varrho_2^{2k} = 1,$$

d. h. ϱ muß eine $2k$te Einheitswurzel sein und dies kann nur dann eintreten, wenn

(92) $$y_1(l,\lambda)\,y_2(l,\lambda)\,y_1'(l,\lambda)\,y_2'(y,\lambda) \leqq 0.$$

Es sei aber

$$Y_1(-l,\lambda) = 0, \quad \text{also} \quad \alpha y_1(-l,\lambda) + \beta y_2(-l,\lambda) = 0,$$

dann ist nach der Definition von $Y_1(-l,\lambda)$ auch

$$Y_1(+l,\lambda) = 0, \quad \text{also} \quad -\alpha y_1(-l,\lambda) + \beta y_2(-l,\lambda) = 0,$$

und diese Gleichungen sind nur dann möglich, wenn entweder

$$y_2(-l,\lambda) = 0 \text{ und } \alpha = 0, \quad \text{oder} \quad y_1(-l,\lambda) = 0 \text{ und } \beta = 0$$

ist.

Bei jeder dieser beiden Annahmen ist aber $\varrho_1 = \varrho_2$ und wir haben einen der vorher ausgeschlossenen Fälle.

Jedenfalls ist durch (92) der Wirtingersche Satz bewiesen, der aussagt, daß mit wachsendem k die Eigenwerte λ sich nur in solchen Bereichen der λ-Achse häufen können, in denen (92) erfüllt ist; der hier gegebene Beweis unterscheidet sich nur durch unwesentliche Modifikationen von dem von Herrn Wirtinger l. c. gegebenen.

Der Unterschied der zu zwei benachbarten Eigenwerten $\lambda_m^{(k)}$ und $\lambda_{m+1}^{(k)}$ gehörigen Werte $\varrho_m^{(k)}$ und $\varrho_{m+1}^{(k)}$ soll jetzt berechnet werden. Es sei

$$\varrho_m^{(k)} = e^{i\chi_m}, \qquad \varrho_{m+1}^{(k)} = e^{i\chi_{m+1}},\text{*)}$$

dann ist:

$$|\chi_{m+1} - \chi_m| = \frac{2\pi}{2k} \quad \text{oder} \quad |\chi_{m+1} - \chi_m| = 0,$$

der letztere Fall kann jedoch wieder nur für solche λ eintreten, die isoliert liegen und sich nur im Unendlichen häufen können.

Nun ist:

$$\cos(\chi_m) = y_1(l,\lambda_m^{(k)})\,y_2'(l,\lambda_m^{(k)}) + y_1'(l,\lambda_m^{(k)})\,y_2(l,\lambda_m^{(k)}).$$

---

*) i ist hier $\sqrt{-1}$.

Also erhält man zwischen $\lambda_m^{(k)}$ und $\lambda_{m+1}^{(k)}$ die Beziehung:

$$
(93) \quad \begin{aligned} &\arccos\left[y_1(l, \lambda_m^{(k)})\, y_2'(l, \lambda_m^{(k)}) + y_1'(l, \lambda_m^{(k)})\, y_2(l, \lambda_m^{(k)})\right] \\ &- \arccos\left[y_1(l, \lambda_{m+1}^{(k)})\, y_2'(l, \lambda_{m+1}^{(k)}) + y_1'(l, \lambda_{m+1}^{(k)})\, y_2(l, \lambda_{m+1}^{(k)})\right] = \frac{2\pi}{2k} \\ &\qquad\qquad \text{oder} = 0. \end{aligned}
$$

Da die linke Seite von (93) nur analytische Funktionen der λ enthält, so sieht man, daß die Eigenwerte λ in denjenigen Bereichen, in denen die ϱ Einheitswurzeln sind, sich mit wachsendem k beliebig stark häufen.

Um nun diese vorläufigen Untersuchungen zum Abschluß zu bringen, müssen wir sehen, ob und welche Eigenfunktionen in den oben erwähnten Ausnahmefällen auftreten können. Diese traten dann ein, wenn $\varrho_1 = \varrho_2$ war, also wenn $y_1(l, \lambda) = 0$ oder $y_2(l, \lambda) = 0$ oder $y_1'(l, \lambda) = 0$ oder $y_2'(l, \lambda) = 0$ war.

Im ersten Falle ist einerseits $y_1(z, \lambda)$ selbst eine Eigenfunktion, die in $-l$ und $2kl - l$ verschwindet, anderseits $\varrho = +1$; im 2. Falle ist $y_2(z, \lambda)$ eine Eigenfunktion, $\varrho = -1$. Ganz anders aber ist die Sachlage, wenn

$$y_1'(l, \lambda) = 0 \quad \text{oder} \quad y_2'(l, \lambda) = 0$$

ist, ohne daß gleichzeitig einer der beiden anderen Fälle eintritt. Wenn dann, was vorkommen kann, die in $-l$ verschwindende Lösung in diesem Falle auch in $(2k-1)l$ verschwindet, wobei k eine ganze Zahl größer als 1 sein mag, so verschwindet sie auch wieder für $(4k-1)l$ und hat die Periode $2kl$ oder $4kl$.

Denn es sei $y_1'(-l, \lambda) = 0$ oder $y_2'(-l, \lambda) = 0$. Die in $-l$ verschwindende Lösung bezeichnen wir mit $y(z, \lambda)$ und es sei $y'(-l, \lambda) = 1$. Dann ist

$$y(z, \lambda)\, y_i'(z, \lambda) - y'(z, \lambda)\, y_i(z, \lambda) = -c,$$

wenn $i = 1$ oder $= 2$ und $y_i(-l, \lambda) = c$.

Also ist

$$y'((2k-1)l, \lambda)\, y_i((2k-1)l, \lambda) = +c$$

und

$$y'((2k-1)l, \lambda) = (-1)^{ik}, \qquad (i = 1 \text{ oder } = 2)$$

Es ist daher

$$y(-l, \lambda) = y((2k-1)l, \lambda) = 0; \quad y'(-l, \lambda) = (-1)^{ik} y'((2k-1)l, \lambda),$$

und $y(z, \lambda)$ hat, wie behauptet war, die Periode $2kl$ oder $4kl$.

§ 2.

Aufstellung der Integralgleichung und der dazu gehörigen quadratischen Form. Die Darstellung willkürlicher Funktionen.

Nach dieser allgemeinen Orientierung nehmen wir die Methode des Kap. I auf; wir formen die Differentialgleichung um und gehen dann zur Integralgleichung und der dazu gehörigen quadratischen Form über. Wir setzen also:

$$e^{-(z+l)} = s, \quad z = (-l) + |\lg s|; \tag{94}$$

wobei s von 1 bis $e^{-2kl} = \varepsilon$ geht.

Die Differentialgleichung wird dann:

$$\frac{d}{ds} s \frac{du}{ds} + \lambda \frac{h(-l + |\lg s|)}{s} u = 0. \tag{95}$$

Wir schreiben dann abkürzend $h_1(s)$ statt $h(-l + |\lg s|)$; $h_1(s)$ ist wieder stets positiv und hat für $0 \leqq s \leqq 1$ eine endliche obere Grenze. Ferner ist $h_1(s \cdot e^{-2l}) = h_1(s)$.

Wir bestimmen jetzt eine Zahl α so, daß

$$\alpha h_1(s) > 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq 1$$

und schreiben statt (95)

$$\frac{d}{ds} s \frac{du}{ds} + \left(\frac{-\alpha h_1(s) + (\lambda + \alpha) h_1(s)}{s}\right) u = 0. \tag{96}$$

Dann ist jeder Eigenwert $\lambda + \alpha$ von (96) größer als α, wie klein auch ε sein mag. Wir bilden jetzt für

$$\frac{d}{ds} s \frac{du}{ds} - \frac{\alpha h_1(s) u}{s} = 0 \tag{97}$$

die Greensche Funktion, die in ε und 1 verschwinden soll. Dieselbe sei $G_3^{(\varepsilon)}(st)$ und es ist nach (67), (68) und (69)

$$G_3^{(\varepsilon)}(st) \leqq G_1^{(\varepsilon)}(st), \quad \left(\frac{d}{ds} G_3^{(\varepsilon)}(st)\right)_{s=\varepsilon} \leqq \left(\frac{d}{ds} G_1^{(\varepsilon)}(st)\right)_{s=\varepsilon};$$

$$|G_3^{(\varepsilon_1)}(st) - G_3^{(\varepsilon_2)}(st)| \leqq |G_1^{(\varepsilon_1)}(st) - G_1^{(\varepsilon_2)}(st)|;$$

also existiert:

$$\lim_{\varepsilon=0} G_3^{(\varepsilon)}(st) = G_3(st)$$

und es ist

$$|G_3(st) - G_3^{(\varepsilon)}(st)| \leqq |G_1(st) - G_1^{(\varepsilon)}(st)|.$$

Die zum Intervalle ε bis 1 gehörigen Eigenfunktionen von (96) bezeichnen wir mit $\psi_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = y_k(z, \lambda)$, dann ist

$$\psi_\lambda^{(\varepsilon)}(s) - (\lambda + \alpha) \int_\varepsilon^1 G_3^{(\varepsilon)}(st) \frac{h_1(t)}{t} \psi_\lambda^{(\varepsilon)}(t)\, dt = 0 \tag{98}$$

und wir setzen

$$K_3^{(\varepsilon)}(st) = \frac{G_3^{(\varepsilon)}(st) \sqrt{h_1(t)} \sqrt{h_1(s)}}{\sqrt{s} \sqrt{t}} \quad \text{für} \quad s \geqq \varepsilon,\ t \geqq \varepsilon;$$

$$K_3^{(\varepsilon)}(st) = 0 \quad \text{für} \quad s \leqq \varepsilon \quad \text{oder} \quad t \leqq \varepsilon,$$

$$\psi_\lambda^{(\varepsilon)}(s) \frac{\sqrt{h_1(s)}}{\sqrt{s}} = \varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s) \quad \text{für} \quad s \geqq \varepsilon; \quad \varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = 0 \quad \text{für} \quad s \leqq \varepsilon, \tag{99}$$

so daß man erhält

$$\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s) - (\lambda + \alpha) \int_0^1 K_3^{(\varepsilon)}(st)\, \varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(t)\, dt = 0. \tag{100}$$

Die normierten Eigenfunktionen $\bar{\varphi}_\lambda^{(\varepsilon)}(s)$ sind dann

$$\bar{\varphi}_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = \frac{\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)}{\sqrt{\int_0^1 \varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)^2\, ds}} = \frac{\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)}{\sqrt{\int_\varepsilon^1 y_k^2(z, \lambda) \frac{h_1(s)}{s}\, ds}}.$$

Dabei denken wir uns in (91) die Konstanten a und b so bestimmt, daß

$$ab = 1.$$

Wir haben daher:

$$\int_\varepsilon^1 y_k^2(z,\lambda) \frac{h_1(s)}{s}\, ds = \int_{-l}^{(2k-1)l} y_k^2(z,\lambda)\, h(z)\, dz = a^2 \int_{-l}^{(2k-1)l} Y_1^2(z,\lambda)\, h(z)\, dz$$

$$+ 2ab \int_{-l}^{(2k-1)l} Y_1(z,\lambda)\, Y_2(z,\lambda)\, h(z)\, dz + b^2 \int_{-l}^{(2k-1)l} Y_2^2(z,\lambda)\, h(z)\, dz$$

$$= a^2 \frac{1-\varrho_1^{2k}}{1-\varrho_1^2} \int_{-l}^{+l} Y_1^2(z,\lambda)\, h(z)\, dz + 2kab \int_{-l}^{+l} Y_1(z,\lambda)\, Y_2(z,\lambda)\, h(z)\, dz$$

$$+ b^2 \frac{1-\varrho_2^{2k}}{1-\varrho_2^2} \int_{-l}^{+l} Y_2^2(z,\lambda)\, h(z)\, dz = 2kab \int_{-l}^{+l} Y_1(z,\lambda)\, Y_2(z,\lambda)\, h(z)\, dz,$$

wenn wir noch voraussetzen, daß $\varrho^2 \neq 1$, da $\varrho_1^{2k} = 1$, $\varrho_2^{2k} = 1$, $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = 1$ ist.

Nun ist aber $\varrho^2 = 1$ nur in den oben besprochenen Ausnahmefällen; man hat also, wenn wir von diesen absehen:

$$\bar{\varphi}_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = \frac{\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)}{\sqrt{+ 2k \int_{-l}^{+l} Y_1(z,\lambda)\, Y_2(z,\lambda)\, h(z)\, dz}}. \tag{101}$$

In den ersten beiden Ausnahmefällen erhält man nun als normierte Eigenfunktionen:

$$\overline{\varphi}_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = \frac{\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)}{\sqrt{\int\limits_{-l}^{(2k-1)l}(y_i(z,\lambda))^2 h(z)\,dz}} \quad (i = 1 \text{ oder } 2),$$

also:

$$\overline{\varphi}_\lambda^{(\varepsilon)}(s) = \frac{\varphi_\lambda^{(\varepsilon)}(s)}{\sqrt{k\int\limits_{-l}^{+l} y_i^2(z,\lambda)\,h(z)\,dz}}.$$

Im 3. und 4. Falle ist die Sachlage eine andere, da nur für spezielle k Eigenfunktionen hier existieren; jedoch wird, wenn es Eigenfunktionen gibt, der normierende Faktor mit k unendlich groß wie $\sqrt{k}$.*)

Wir bilden jetzt die quadratische Form:

(102) $$K_3^{(\varepsilon)}(xy) = \sum k_{pq}^{(\varepsilon)} x_p y_q,$$

wobei

$$k_p^{\varepsilon,3}(s) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 K_3^{(\varepsilon)}(st)\sin(p\pi t)\,dt$$

und

(103) $$k_{pq}^{\varepsilon,3} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 2K_3^{(\varepsilon)}(st)\sin(p\pi t)\sin(q\pi s)\,ds\,dt$$

ist und wir kürzer $k_{pq}^{(\varepsilon)}$ statt $k_{pq}^{\varepsilon,3}$ schreiben. Es folgt dann wie in Kap. I § 3 und Kap. II § 3:

(104) $$\lim_{\varepsilon=0} K_3^{(\varepsilon)}(xy) = K_3(xy) \quad \text{für } (xx) \leqq 1,\ (yy) \leqq 1.$$

Es sei nun

$$L_{\lambda_i}^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi_{\lambda_i}^{(\varepsilon)}(s)\sin(p\pi s)\,ds\cdot x_p$$

Dann wird

$$K_\varepsilon(xx) = \sum_i{}' \frac{(L_{\lambda_i}^{(\varepsilon)}(x))^2}{2k\int\limits_{-l}^{+l} Y_1(z,\lambda_i)\,Y_2(z,\lambda_i)\,h(z)\,dz\,(\lambda_i+\alpha)}.$$

Dabei bedeutet der Strich am Summenzeichen, daß es Werte von i gibt, für die der dazugehörige Summand eine andere Form hat; das tritt aber nur für die Ausnahmefälle ein.

Wir teilen die Summe wieder in zwei Teile von $i = 1$ bis $i = N_\varepsilon$, wobei N_ε so groß gewählt sein mag, daß $\lambda_{N_\varepsilon} \geqq \frac{1}{\delta}$ für alle ε ist, daß also

*) Dies folgt unmittelbar aus dem letzten Satz des vorhergehenden Paragraphen, wenn wir jetzt für k ein beliebig großes Vielfaches des dortigen k nehmen.

wie in Kap. I, § 3 $|R_{N_\varepsilon}| < \delta$ wird, sobald λ_{N_ε} der $\frac{1}{\delta}$ am nächsten gelegene größere Eigenwert von $K^{(\varepsilon)}(st)$ ist. Dann gibt es nur eine endliche Zahl kritischer Punkte $\lambda < \frac{1}{\delta}$, für welche Ausnahmefälle eintreten können, und wir können diese nach obigem durch so kleine Segmente ausschließen, daß der Beitrag aller Summanden, die zu in diese Segmente fallenden λ gehören, für alle ε beliebig klein gemacht werden kann.

Nun war nach (93) der Unterschied von 2 aufeinanderfolgenden χ_m und χ_{m+1} $\frac{2\pi}{2k}$, abgesehen von den Fällen, in denen $\chi_{m+1} - \chi_m = 0$ ist, was nur für eine isolierte Menge von Werten λ eintreten kann, die sich nur im Unendlichen häufen und also auf das Folgende von keinem Einfluß sind. Wir wählen dann $|\chi|$ als Integrationsveränderliche und setzen wieder voraus, daß $\sum |x_i|$ konvergiert.

Dann findet man, da gemäß (93) nach dem Grenzübergang

$$|d\chi| = \left|\frac{d}{d\lambda}[\arccos(y_1(l,\lambda)\,y_2'(l,\lambda) + y_1'(l,\lambda)\,y_2(l,\lambda))]\right| d\lambda$$

ist, durch einen ähnlichen Grenzübergang wie in den früheren Kapiteln

(105) $K(xx) =$

$$\sum_\lambda \int^{\infty} \frac{(L_\lambda(x))^2}{2\pi \int\limits_{-l}^{+l} Y_1(z,\lambda)\; Y_2(z,\lambda)\; h(z)\; dz\,(\lambda + \alpha)} \left|\frac{d}{d\lambda}[\arccos \Delta(l,\lambda)]\right| d\lambda,$$

wo

$$\Delta(l,\lambda) = y_1(l,\lambda)\,y_2'(l,\lambda) + y_1'(l,\lambda)\,y_2(l,\lambda)$$

gesetzt ist und jedes Integral über ein kontinuierliches Spektrum und die Summe über die Gesamtheit der kontinuierlichen Spektren zu nehmen ist.

Man sieht, wie nebenbei bemerkt werden soll, leicht ein, daß die von einem Spektrum freien Stücke mit wachsendem λ schließlich immer kleiner werden.

Wir haben jetzt nur noch die in Kap. I, § 5 u. 6 gemachten Schlüsse zu wiederholen, jedoch tritt bei der Abschätzung der Fourierkoeffizienten dadurch eine nicht unwesentliche Modifikation ein, daß $K_3(st)$ den Faktor $\sqrt{h_1(s)}\sqrt{h_1(t)}$ enthält, der zwischen $s=0$ und $s=1$ bzw. $t=0$ und $t=1$ unendlich viele Maxima und Minima besitzt. Jedoch kann man zu jedem beliebigen reellen Exponenten γ eine endliche, reelle Zahl β so angeben, daß

$$s^\gamma \sqrt{h_1(s)} - \beta s^{\frac{\gamma}{2}}$$

nur eine endliche Zahl Maxima und Minima hat, so daß jetzt als Analogon zu (42)

$$|k_p^{\varepsilon,3}(s)| < \left|\frac{A}{p^{\frac{3}{2}-\gamma}}\right|$$

wird, wobei γ beliebig klein gewählt werden kann; dadurch wird aber die ganze dortige Ableitung nicht gestört. Man findet also wie dort

$$(106)\qquad \mathsf{K}(\lambda; xx) = \sum_{\mu} \int \frac{L_\mu(x)^2}{1 - \frac{\lambda}{\mu + \alpha}} \mathfrak{F}(\mu)\, d\mu + E(xx),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$(107)\qquad \mathfrak{F}(\mu) = \frac{\left| \frac{d}{d\mu} [\arccos(y_1(l,\mu)\, y_2'(l,\mu) + y_1'(l,\mu)\, y_2(l,\mu))] \right|}{2\pi \int_{-l}^{+l} Y_1(z,\mu)\, Y_2(z,\mu)\, h(z)\, dz}.$$

Setzt man wieder $\lambda = 0$, so findet man

$$(108)\qquad (xy) = \sum_{\mu} \int L_\mu(x)\, L_\mu(y)\, \mathfrak{F}(\mu)\, d\mu + E(xy).$$

Es sei nun

$$f_1(s) = \int_0^1 K_3(st)\, g(t)\, dt;$$

wir setzen

$$x_p = k_p^{(3)}(s), \quad y_q = \sqrt{2} \int_0^1 \sin(q\pi t)\, g(t)\, dt,$$

wobei $g(t)$ in 0 und 1 verschwinden und eine stetige 1. Ableitung besitzen soll, die den Dirichletschen Bedingungen genügt. Man erhält dann wieder, wenn $s \neq 0$,

$$f_1(s) = \sum_{\lambda} \int d\lambda\, \mathfrak{F}(\lambda)\, \varphi_\lambda(s) \int_0^1 \varphi_\lambda(t)\, f_1(t)\, dt,$$

und wenn wiederum

$$f(s) = \sqrt{s}\, \frac{f_1(s)}{\sqrt{h_1(s)}}$$

ist,

$$(109)\qquad f(s) = \sum_{\lambda} \int d\lambda\, \mathfrak{F}(\lambda)\, \psi_\lambda(s) \int_0^1 \psi_\lambda(t)\, f(t)\, \frac{h_1(t)}{t}\, dt.$$

Dabei ist $\psi_\lambda(s) = y(x, \lambda)$ durch (91) festgelegt, $\mathfrak{F}(\lambda)$ durch (107) definiert. Nun ist, wie in Kap. I, § 6,

$$-\frac{\sqrt{h_1(t)}}{\sqrt{t}}(gt) = \frac{d}{dt}\, t \frac{d}{dt}(ft) - \frac{\alpha h_1(t)\, f(t)}{t},$$

wenn $f(t)$ für $t = 0$ und $t = 1$ verschwindet und zweimal stetig differentiierbar ist; aus den obigen Bedingungen für $g(t)$ erhält man jetzt die Bedingungen, unter denen sich $f(s)$ in der Form (109) darstellen läßt.

Kapitel IV.

Die Integraldarstellungen der Potentialtheorie.

§ 1.

Die Verteilung der Eigenwerte.

In seinen Vorlesungen über Lamésche Funktionen im W. S. 1889/90 hat Herr Klein den Gedanken entwickelt, daß man die Mehrzahl der in der Potentialtheorie auftretenden Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen unter einheitlichem Gesichtspunkte ableiten kann, indem man die sämtlichen bei diesen Darstellungen in Betracht kommenden Orthogonalsysteme als Ausartungen des Systems konfokaler Zykliden betrachtet und unter Zugrundelegung des letzteren zunächst für einen von 6 konfokalen Zykliden begrenzten Körper geeignete Reihenentwicklungen aufstellt.*)

Dieser Gedanke wurde in einer von Herrn M. Bôcher gelösten Göttinger Preisarbeit**) näher dargestellt und ausgeführt, wenigstens was die Reihenentwicklungen anbetrifft; jedoch findet sich bei Bôcher weder ein Konvergenzbeweis, noch weniger die Angabe von hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine vorgegebene Funktion sich durch solche Reihenentwicklungen darstellen läßt.

Ein nicht vollständig durchgeführter Ansatz zum Konvergenzbeweise findet sich in der Doktordissertation von Herrn Jaccottet „Über die allgemeine Reihenentwicklung nach Laméschen Produkten", Göttingen 1895. Der Konvergenzbeweis ergibt sich, wie ich gezeigt habe***), unmittelbar aus der Theorie der Integralgleichungen, aber auch die Bedingungen für die Möglichkeit der Entwicklung einer Funktion nach solchen Reihen sind in der zitierten Arbeit angegeben.

Es handelt sich bei dieser Problemstellung im wesentlichen darum, die Eigenfunktionen der Differentialgleichung†)

$$(110)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \left[-\frac{5}{4}(\mu^3 - \nu^3) + A(\mu - \nu)\right] f = 0$$

aufzustellen, wobei

$$(111)\qquad \begin{aligned} d\xi &= \frac{d\mu}{2\sqrt{(\mu - e_1)(\mu - e_2)(\mu - e_3)(\mu - e_4)(e_5 - \mu)}}, \\ d\eta &= \frac{d\nu}{2\sqrt{(\nu - e_1)(\nu - e_2)(\nu - e_3)(e_4 - \nu)(e_5 - \nu)}} \end{aligned}$$

*) Vergl. F. Klein, Zur Theorie der Laméschen Funktionen. Göttinger Nachrichten 1890.

**) Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Leipzig 1894.

***) Mathematische Annalen 63.

†) l. c. S. 52 u. 53.

und e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 gegebene reelle Größen sind, für welche z. B.

$$e_1 < e_2 < e_3 < e_4 < e_5; \quad e_4 \leqq \mu \leqq e_5; \quad e_3 \leqq \nu \leqq e_4; \quad \sum_{i=1}^{5} e_i = 0;$$

A ist ein Parameter.

Als Eigenfunktionen nehmen wir solche Lösungen von (110), welche auf den Seiten des Rechteckes $\mu = \bar{\mu}_1$; $\mu = \bar{\mu}_2$; $\nu = \varepsilon_1$; $\nu = d$ verschwinden. Der Kernpunkt meiner eben zitierten Arbeit lag nun in dem Nachweis, daß sich alle solche Eigenfunktionen von (110) durch ein Produkt*) $E(\mu) \cdot E_1(\nu)$ darstellen lassen, wobei:

(112a) $$\frac{d^2 E(\mu)}{d\xi^2} + \left(-\frac{5}{4}\mu^3 + A\mu + B\right) E(\mu) = 0,$$

(112b) $$\frac{d^2 E_1(\nu)}{d\eta^2} - \left(-\frac{5}{4}\nu^3 + A\nu + B\right) E_1(\nu) = 0.$$

Herr Klein**) hatte gezeigt, daß man die Parameter A und B auf eine und nur eine Weise so bestimmen kann, daß $E(\mu)$ in $\bar{\mu}_1$ und $\bar{\mu}_2$ verschwindet und dazwischen m Nullstellen hat, und daß ferner $E_1(\nu)$ in ε_1 und d verschwindet und zwischen ε_1 und d n Nullstellen besitzt.

Dieses Theorem heißt *Kleinsches Oszillationstheorem*, und nach der obigen Bemerkung werden alle Eigenfunktionen von (110) durch das Kleinsche Oszillationstheorem geliefert. Dieses steht also im Mittelpunkte der Reihenentwicklungen der Potentialtheorie.

Wir fragen uns jetzt, was aus den Eigenwerten, Eigenfunktionen und den Reihenentwicklungen wird, wenn z. B. die beiden singulären Punkte e_2 und e_3 zusammenfallen und sich das Segment von ν an e_3 heranzieht. Wir setzen speziell fest, daß $e_2 = e_3 = 0$, $\sum e_i = 0$ sei, dann ist:

$$d\xi = \frac{d\mu}{2\mu\sqrt{(\mu - e_1)(\mu - e_4)(e_5 - \mu)}}, \qquad d\eta = \frac{d\nu}{2\nu\sqrt{(\nu - e_1)(e_4 - \nu)(e_5 - \nu)}}.$$

Statt (112a u. b) können wir nun auch schreiben, wenn

$$\mu^2(\mu - e_1)(\mu - e_4)(e_5 - \mu) = R(\mu), \qquad \nu^2(\nu - e_1)(e_4 - \nu)(e_5 - \nu) = R_1(\nu)$$

gesetzt wird,

(113a) $$4R(\mu)\frac{d^2 E(\mu)}{d\mu^2} + 2R'(\mu)\frac{dE(\mu)}{d\mu} + \left(-\frac{5}{4}\mu^3 + A\mu + B\right) E(\mu) = 0,$$

(113b) $$4R_1(\nu)\frac{d^2 E_1(\nu)}{d\nu^2} + 2R_1'(\nu)\frac{dE_1(\nu)}{d\nu} - \left(-\frac{5}{4}\nu^3 + A\nu + B\right) E_1(\nu) = 0.$$

Die zu einer Oszillationszahl m für das Intervall $\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2$ gehörigen Eigen-

*) Herr Hilbert hat diesen Satz neuerdings ohne Kontinuitätsbetrachtungen bewiesen. Jahresberichte 1907 S. 76.

**) Mathematische Annalen Bd. 18.

wertepaare A, B haben die Eigenschaft, daß die Geraden $y = A\mu + B$ in der $y\mu$-Ebene eine Kurve*) von der in der Figur 2 schematisch gezeichneten Form einhüllen. Ein Blick auf die Figur lehrt, daß man von jedem Punkte der μ-Achse, der nicht zwischen $\bar{\mu}_1$ und $\bar{\mu}_2$ liegt, eine und nur eine Tangente an die Kurve ziehen kann. Zwei Tangenten an die Kurve können sich nur innerhalb des Streifens $\mu = \bar{\mu}_1$ und $\mu = \bar{\mu}_2$ schneiden; ferner rückt die Kurve mit wachsender Oszillationszahl nach oben. Diese Tatsachen lassen sich leicht analytisch begründen (vgl. die zit. Stellen).

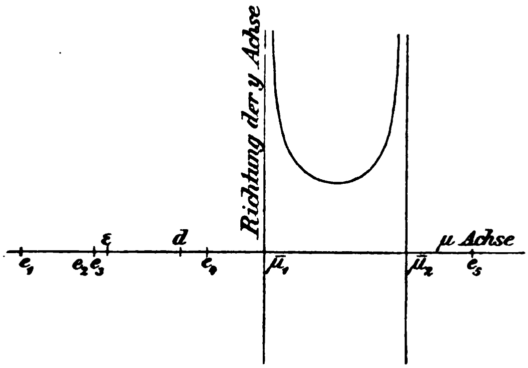


Fig. 2.

Es sei nun $E(\mu; A, B)$ eine Lösung von (113a), die in $\bar{\mu}_1$ verschwindet und deren erste Ableitung daselbst den Wert 1 hat, dann sind A und B durch die Gleichung verbunden

$$E(\bar{\mu}_2; A, B) = 0.$$

A ist also eine analytische Funktion von B und umgekehrt.

Um eine weitere Orientierung über die Verteilung der Eigenwerte zu erhalten, nehmen wir zum Vergleiche:

$$(114) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + A_1(\mu - \nu) f = 0,$$

deren Eigenfunktionen sich wieder als Produkte $g(\mu) \cdot h(\nu)$ darstellen lassen, wobei:

$$(115\text{a}) \qquad \frac{d^2 g(\mu)}{d\xi^2} + \quad (A_1\mu + B_1)\, g(\mu) = 0,$$

$$(115\text{b}) \qquad \frac{d^2 h(\nu)}{d\eta^2} + (-(A_1\nu + B_1))\, h(\nu) = 0$$

ist.

Wir betrachten jetzt die Oszillationsfigur, die zu denjenigen Eigenfunktionen von (115a) gehört, die nur in $\mu = \bar{\mu}_1$ und $\mu = \bar{\mu}_2$ verschwinden. Diese Figur liegt ganz oberhalb der μ-Achse**); wir ziehen jetzt vom Punkte $(\mu = e_3 = 0, y = 0)$ die Tangente $y = \alpha\mu$ an diese Oszillationsfigur; dann hat α

*) Klein, Math. Annalen Bd. 18; ferner Bôcher p. 126f. und die Arbeit des Verf. in den Jahresberichten 1907.

**) Die horizontale Tangente an diese Oszillationsfigur und damit die ganze Figur liegen nämlich oberhalb der μ-Achse, da $B_1 > 0$ sein muß, wenn $A_1 = 0$.

einen bestimmten von 0 verschiedenen Wert. Aus den obigen Bemerkungen folgt ferner, daß für die Tangente $y = \alpha_m \mu$ an die zur Oszillationszahl m gehörige Oszillationsfigur $\alpha_m > \alpha$ ist. Es sei nun A_1, B_1 ein Wertepaar, für das (115a) eine zur Oszillationszahl m gehörige Lösung, (115b) eine solche Lösung besitzt, die in ε und d verschwindet. Dann liegt die Gerade $y = A_1 \mu + B_1$ unterhalb der Geraden $y = \alpha_m \mu$ in dem von den Geraden $\mu = e_3 = 0$ und $\mu = e_4$ gebildeten Streifen. In der Tat schneiden sich zwei Tangenten an die zwischen den Geraden $\mu = \bar{\mu}_1$ und $\mu = \bar{\mu}_2$ gelegene Oszillationsfigur nur innerhalb des von $\mu = \bar{\mu}_1$ und $\mu = \bar{\mu}_2$ gebildeten Streifens. Entweder ist also unsere Behauptung richtig oder $y = A_1 \mu + B_1$ liegt für $e_3 \leqq \mu \leqq e_4$ ganz oberhalb $y = \alpha_m \mu$. Für diese Werte von μ führten wir aber früher ν als Veränderliche ein; es wäre also sicher in dem Streifen zwischen ε und d $A_1 \nu + B_1$ durchaus positiv, also der Faktor von $h(\nu)$ in (115b) durchaus negativ. Dann aber könnte keine Lösung von (115b) bei diesem Wertepaare $A_1 B_1$ mehr als eine Nullstelle im Intervalle ε, d besitzen, also unmöglich in ε und d verschwinden. Es liegt daher die Tangente $y = A_1 \mu + B_1$ im Intervalle (e_3, e_4) unterhalb $y = \alpha_m \mu$; dann folgt aber unmittelbar aus der Figur, daß $A_1 > \alpha_m$ ist, also ist a fortiori $A_1 > \alpha$. D. h. aber: Alle Eigenwerte A_1 von (114) für ein Rechteck, das begrenzt wird von $\nu = \varepsilon_1$, $\nu = d$, $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_2$ in der Ebene $\nu\mu$, sind größer als α. Nun geht aus einem von mir bewiesenen Hilfssatze*) hervor, daß, wenn A und A_1 entsprechende Eigenwerte von (110) bzw. (114) sind, die zu dem gleichen Rechteck gehören, stets $A \geqq A_1$ ist; es ist also in (110) A stets positiv und größer als α, wie nahe auch ε_1 an 0 heranrücken mag.

Wir zeigen jetzt, daß $B \leqq 0$ sein muß. In der Tat, nehmen wir an, es gebe für ein Wertepaar $A > 0$, $B > 0$ für (112a u. b) Eigenfunktionen, die in μ_1 und μ_2 bzw. ε_1 und d verschwinden. Es kann aber eine Eigenfunktion für den Bereich (ε_1, d) gewiß nur dann existieren, wenn $\frac{5}{4}\nu^3 - A\nu - B$ auch positive Werte annimmt, was z. B. für einen Wert ν_3 eintreten soll, wobei $\varepsilon_1 \leqq \nu_3 \leqq d$ ist. Dann aber ist

$$\frac{5}{4}\nu^3 - A\nu - B = \nu\left(\frac{5}{4}\nu^2 - A\right) - B$$

positiv für jedes $\nu > \nu_3$, also ist auch $\frac{5}{4}\mu^3 - A\mu - B$ stets positiv, da ja $\mu > d$ ist. Daher wäre der Koeffizient von $E(\mu)$ in (112a) stets negativ und $E(\mu)$ könnte keine Eigenfunktion sein, die in μ_1 und μ_2 verschwindet. Die Annahme eines positiven B ist also unzulässig.

---

*) l. c. S. 47.

Es folgt daraus auch, daß, wenn A und B zu Eigenfunktionen unseres Bereiches gehören, $A\mu + B = y$ die μ-Achse in einem Punkte zwischen 0 und μ_2 schneiden muß. Es ist also stets $\left|\frac{B}{A}\right| < \mu_2$; zusammenfassend haben wir

$$(116) \qquad A \geqq \alpha, \quad B \leqq 0; \quad |B| \leqq \mu_2 A.$$

Wir bestimmen jetzt für negative B die Exponenten r' der Fundamentallösungen von (113b) im Punkt $\nu = 0$. Wir setzen zu diesem Zwecke $-e_1 \cdot e_4 \cdot e_5 = e$; e ist also eine positive Zahl und man findet für r'

$$(117) \quad 4er'(r'-1) + 4er' - B = 0; \quad r' = \pm\sqrt{\frac{B}{4e}} = \pm\, i\sqrt{\frac{-B}{4e}} = \pm\, ir\pi,$$

wobei $i = \sqrt{-1}$, $\sqrt{\frac{-B}{4e}} = r\pi$ ist.

Man findet daher wieder zwei reelle Fundamentallösungen:

$$(118) \qquad \begin{aligned} U_0^{(r)}(\nu) &= \cos(r\pi|\lg(\nu)|) + \nu\mathfrak{P}_0^{(r)}(\nu), \\ U_1^{(r)}(\nu) &= \sin(r\pi|\lg(\nu)|) + \nu\mathfrak{P}_1^{(r)}(\nu), \end{aligned}$$

und aus diesen setzen wir die Funktion $u(\nu, r)$ zusammen, die für $\nu = d$ verschwindet, indem wir setzen

$$(119) \qquad U_0^{(r)}(\nu) \cdot U_1^{(r)}(d) - U_0^{(r)}(d)\, U_1^{(r)}(\nu) = u(\nu, r).$$

Wenn man daher eine beliebig kleine Umgebung von $r = 0$ ausschließt und $A < \mathsf{A}$ voraussetzt, so daß $|B| < \mu_2 \mathsf{A}$ ist, so kann man eine endliche von 0 verschiedene Zahl f angeben, daß stets

$$(U_1^{(r)}(d))^2 + (U_0^{(r)}(d))^2 \geqq f$$

ist.

Berücksichtigen wir ferner die oben konstatierte Tatsache, daß A eine analytische Funktion von B ist, so findet man durch dieselben Betrachtungen wie in Kap. II, § 1, daß der Unterschied zwischen zwei benachbarten Werten $r_1^{(\varepsilon_1)}$ und $r_2^{(\varepsilon_1)}$ $\frac{1 + \varepsilon_1 M}{|\lg \varepsilon_1|}$ ist, wobei M eine variable Größe ist, die aber unter den gemachten Voraussetzungen unterhalb einer festen, von ε_1 unabhängigen Zahl liegt. Unter benachbarten Werten $r_1^{(\varepsilon_1)}$ und $r_2^{(\varepsilon_1)}$ sind hier solche r verstanden, die in bezug auf das Segment (ε_1, d) zu benachbarten Oszillationszahlen, in bezug auf das Segment $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)$ zu derselben Oszillationszahl gehören. Aus dem Beweise für diesen Satz folgt weiter, daß in den allenfalls auszuschließenden, aber beliebig klein zu wählenden Segmenten in der Umgebung von $r = 0$ die Eigenwerte nicht dichter liegen, und diese Bemerkung genügt zum Nachweise, daß durch das Auftreten solcher Fälle das folgende in keiner Weise geändert wird, da die Summe der hierher gehörigen Glieder beliebig klein gemacht werden kann.

§ 2.

Die Greensche Funktion.

Nachdem dieses vorausgeschickt ist, verfahren wir wie früher. Es seien die Integrationskonstanten für ξ und η und das Vorzeichen der Wurzeln so gewählt, daß

$$\xi(\mu_1) = 0; \quad \xi(\bar{\mu}_2) = a; \quad \eta(\varepsilon_1) = b, \quad \eta(d) = 0$$

ist. b wächst dann in das Unendliche, wenn ε_1 nach 0 konvergiert.

Wir betrachten jetzt in der $\xi\eta$-Ebene das Rechteck, begrenzt von den Seiten $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\xi = a$, $\eta = b$, und bilden für

$$(120) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \left[-\frac{5}{4}(\mu^3 - \nu^3)\right] f = 0$$

die Greensche Funktion $G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$, welche auf dem Rande des Rechteckes verschwindet und in dem im Inneren des Rechteckes gelegenen Punkt $\xi_1 \eta_1$ unendlich wird wie $-\frac{1}{2} \lg((\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2)$.

Da nun $G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ wieder zu kompliziert für eine direkte Untersuchung ist, so wählen wir, wie in Kapitel II, eine Vergleichsfunktion, nämlich die Greensche Funktion $G_1^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$, welche auf dem Rande desselben Rechteckes verschwindet und der Differentialgleichung

$$(121) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0$$

genügt.

Diese Funktion wird bekanntlich durch die konforme Abbildung des Rechteckes auf den Einheitskreis gewonnen und läßt sich daher vermittels der Transzendenten, welche in der Theorie der elliptischen Funktionen auftreten, darstellen. Wir setzen zu diesem Zwecke*)

$$\xi + i\eta = z, \qquad \xi_1 + i\eta_1 = z_1, \qquad \xi_1 - i\eta_1 = z_1',$$

$$\vartheta(z) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot e^{-\frac{b}{a}\pi m^2} \cdot \cos(2m\pi z).$$

Dann ist

$$(122) \qquad G_1^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = -\lg \left| \frac{\vartheta\left(\frac{z - z_1 - bi}{2a}\right) \vartheta\left(\frac{z + z_1 - bi}{2a}\right)}{\vartheta\left(\frac{z - z_1' - bi}{2a}\right) \cdot \vartheta\left(\frac{z + z_1' - bi}{2a}\right)} \right|$$

und

*) Vergl. z. B. A. Harnack: Die Grundlagen des logarithmischen Potentials, Seite 78.

$$\vartheta\left(\frac{z-z_1-bi}{2a}\right)=1-e^{\frac{z-z_1}{a}\cdot i\pi}+e^{-b}R_1(z,z_1);$$

$$\vartheta\left(\frac{z+z_1-bi}{2a}\right)=1-e^{\frac{z+z_1}{a}\cdot i\pi}+e^{-b}R_2(z,z_1),$$

und analog, wenn z_1' an die Stelle von z_1 tritt; dabei ist der Wert der $R(z,z_1)$ für alle z, die innerhalb des Rechteckes liegen, bei jedem noch so großen b unterhalb einer endlichen Größe, wenn z_1 fest im Innern des Rechteckes gelegen ist. Ferner erhält man für genügend große η eine Darstellung von der Form:

$$G_1^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\,\xi_1,\eta_1)=e^{\frac{-\eta\pi}{a}}\,\gamma_1^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\,\xi_1,\eta_1),$$

wobei $\gamma_1^{(\varepsilon_1)}$ für genügend große η vom Charakter einer ganzen Funktion in bezug auf ξ ist, ferner treten in $\gamma_1^{(\varepsilon_1)}$ nur Potenzen mit positiven Exponenten von $e^{\frac{-\eta\pi}{a}}$ und $e^{\frac{(\eta-2b)\pi}{a}}$ auf.

Wir führen jetzt wieder ν statt η ein; es ist

$$\eta=\frac{1}{2\sqrt{-e_1e_4e_5}}\,|\lg\nu|+\mathfrak{P}(\nu).$$

Wir setzen:

$$\frac{\pi}{2a\sqrt{-e_1e_4e_5}}=c_1; \tag{123}$$

dann ist c_1 eine positive von 0 verschiedene Konstante und man erhält

$$G_1^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\,\xi_1,\eta_1)=\nu^{c_1}g_1^{(\varepsilon_1)}(\xi,\nu;\,\xi_1,\nu_1); \tag{124}$$

für $\varepsilon_1=0$ konvergiert*) $G_1^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ nach

$$G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\lg\left|\frac{\left(1-e^{\frac{z-z_1}{a}i\pi}\right)\left(1-e^{\frac{z+z_1}{a}i\pi}\right)}{\left(1-e^{\frac{z-z_1'}{a}i\pi}\right)\left(1-e^{\frac{z+z_1'}{a}i\pi}\right)}\right|.$$

Wir wenden nun den bekannten Greenschen Satz zum Vergleich von

$$G_1^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\quad\text{und}\quad G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\,\xi_1,\eta_1)$$

an und finden wie bei (67) u. f.

$$G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\leqq G_1^{(\varepsilon_1)}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\leqq G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1),$$

---

*) Wir müssen dabei jedoch voraussetzen, daß η und η_1 sich nicht gleichzeitig dem Werte b in jedem einzelnen Falle nähern. Wir erreichen dies, indem wir immer

$$\eta_1\leqq\frac{b}{2}$$

voraussetzen, wobei zu erinnern ist, daß b unendlich groß wird.

ferner

$$\lim_{\varepsilon_1=0} G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = G_2(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \quad \left(\text{wenn } \eta_1 \leqq \frac{b}{2}\right)$$

und

$$G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = \nu^{c_1} \gamma_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1),$$

wenn $\gamma_2^{(\varepsilon_1)}$ dabei eine Funktion von demselben Charakter ist wie $\gamma_1^{(\varepsilon_1)}$.

§ 3.

Aufstellung der Integralgleichung. Übergang zur quadratischen Form.

Es sei jetzt $\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; m, r)$ eine Eigenfunktion von (110), welche für $\xi = 0$, $\xi = a$, $\eta = 0$, $\eta = b$ verschwindet und im Intervall $\xi = 0$ bis $\xi = a$ zur Oszillationszahl m gehört; r ist durch (117) definiert. Dann folgt wieder aus dem Greenschen Satze:

$$(125)\quad \psi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; m, r) - \frac{A_{m,r}}{2\pi} \int_0^a \int_0^b G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \psi^{(\varepsilon_1)}(\xi_1, \eta_1; m, r)(\mu_1 - \nu_1)\, d\xi_1\, d\eta_1 = 0$$

oder

$$\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; m, r)$$
$$- \frac{A_{m,r}}{2\pi} \int_0^a \int_{\varepsilon_1}^d G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta(\nu); \xi_1, \eta(\nu_1)) \cdot \psi^{(\varepsilon_1)}(\xi_1, \eta(\nu_1); m, r)(\mu_1 - \nu_1)\, d\xi_1 \frac{d\nu_1}{\sqrt{R_1(\nu_1)}} = 0.$$

Wir setzen jetzt:

$$(126)\qquad \varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r) = \psi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; m, r) \frac{\sqrt{\mu - \nu}}{\sqrt[4]{R_1(\nu)}} \quad \text{für } \nu \geqq \varepsilon_1;$$

$$\varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r) = 0 \quad \text{für } \nu \leqq \varepsilon_1,$$

$$(127)\quad K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1) = G_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta(\nu); \xi_1, \eta(\nu_1)) \frac{\sqrt{\mu - \nu}\sqrt{\mu_1 - \nu_1}}{\sqrt[4]{R_1(\nu)}\sqrt[4]{R_1(\nu_1)}} \quad \text{für } \nu_1 \text{ und } \nu > \varepsilon_1$$

$$K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1) = 0 \quad \text{für } \nu \leqq \varepsilon_1 \text{ oder } \nu_1 \leqq \varepsilon_1.$$

Dann wird also:

$$(128)\quad \varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r) - \frac{A_{m,r}}{2\pi} \int_0^a \int_0^d K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1)\, \varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi_1, \nu_1; m, r)\, d\xi_1\, d\nu_1 = 0.$$

Die Eigenfunktionen von (128) sind noch zu normieren; wir setzen für die normierte Eigenfunktion:

$$\bar{\varphi}^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r) = \frac{\varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r)}{\sqrt{\int\limits_0^a\int\limits_0^d (\varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r))^2 d\xi\, d\nu}}$$

$$= \frac{\varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m. r)}{\sqrt{\int\limits_0^a\int\limits_{\varepsilon_1}^d (\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; m, r))^2 \frac{(\mu-\nu)}{\sqrt{R_1(\nu)}}\, d\xi\, d\nu}}.$$

Nun ist

$$\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; m, r) = u^{(\varepsilon_1)}(\nu; m, r) E_1^{(\varepsilon_1)}(\mu; m, r),$$

wobei $u^{(\varepsilon_1)}(\nu; m, r)$ mit der in (119) definierten Funktion übereinstimmt. Dann wird:

$$\int\limits_0^a\int\limits_{\varepsilon_1}^d (\psi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \eta; m, r))^2 \frac{(\mu-\nu)\, d\xi\, d\nu}{\nu\sqrt{(\nu-e_1)(e_4-\nu)(e_5-\nu)}}$$

$$= \int\limits_0^a \mu (E^{(\varepsilon_1)}(\mu; m, r))^2 d\xi \cdot \int\limits_{\varepsilon_1}^d \frac{(u^{(\varepsilon_1)}(\nu; m, r))^2 d\nu}{\nu\sqrt{(\nu-e_1)(e_4-\nu)(e_5-\nu)}}$$

$$- \int\limits_0^a (E^{(\varepsilon_1)}(\mu; m, r))^2 d\xi \cdot \int\limits_{\varepsilon_1}^d \frac{(u^{(\varepsilon_1)}(\nu; m, r))^2 d\nu}{\sqrt{(\nu-e_1)(e_4-\nu)(e_5-\nu)}}$$

$$= \int\limits_0^a \mu (E^{(\varepsilon_1)}(\mu; m, r))^2 d\xi \,[(U_1^{(r)}(d))^2 + (U_0^{(r)}(d))^2] \frac{\frac{1}{2}\,|\lg \varepsilon_1|}{\sqrt{-e_1 e_4 e_5}} + M_1$$

$$= \frac{1}{2}\,|\lg \varepsilon_1|\, \chi_{\varepsilon_1}(m, r) + M_1;$$

wobei M_1 unterhalb einer festen Zahl für alle ε_1 liegt, sofern $A < \mathsf{A}$, wenn A beliebig groß vorgegeben ist.*) Man hat also:

(129)
$$\bar{\varphi}^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r) = \frac{\varphi^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; m, r)}{\sqrt{\frac{1}{2}\,|\lg(\varepsilon_1)|\, \chi_{\varepsilon_1}(m, r) + M_1}},$$

$$\text{wobei} \quad \chi_{\varepsilon_1}(m, r) = \int\limits_0^a \frac{\mu (E^{(\varepsilon_1)}(\mu; m, r))^2}{\sqrt{-e_1 e_4 e_5}}\, d\xi\, [(U_1^{(r)}(d))^2 + (U_0^{(r)}(d))^2].$$

Wir wählen nun in einer Ebene mit den Koordinatenachsen ξ und ν für das Rechteck, welches von

$$\xi = 0; \ \nu = 0; \ \xi = a; \ \nu = d$$

begrenzt wird, ein vollständiges orthogonales System, z. B.

$$2 \sin\left(\frac{p\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi\nu}{d}\right), \qquad \begin{matrix} p = 1, 2, \cdots, \\ q = 1, 2, \cdots, \end{matrix}$$

für welches eine zu (19) analoge Formel gilt.

*) Vgl. S. 42.

Dann setzen wir

$$(130)\quad \int_0^a\int_0^d 2K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi,\nu;\xi_1,\nu_1)\sin\left(\frac{p\pi\xi}{a}\right)\sin\left(\frac{q\pi\nu}{d}\right)d\xi\,d\nu = k_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(\xi_1,\nu_1)\,.$$

$$(131)\quad \int_0^a\int_0^d 2k_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(\xi_1,\nu_1)\sin\left(\frac{p_1\pi\xi_1}{a}\right)\sin\left(\frac{q_1\pi\nu_1}{d}\right)d\xi_1\,d\nu_1 = k_{p,q;\,p_1,q_1}^{(\varepsilon_1)}$$

und

$$K^{(\varepsilon_1)}(xy) = \sum_{p,q;\,p_1,q_1} k_{p,q;\,p_1,q_1}^{(\varepsilon_1)}\, x_{p,q}\, y_{p_1,q_1},$$

wobei p, q, p_1, q_1 alle ganzen Zahlen von 1 ab durchlaufen.*)

Wie dann aus den Untersuchungen über die Eigenwerte A hervorgeht, sind alle $K^{(\varepsilon_1)}(xy)$ beschränkte Formen und liegen für alle ε_1 unterhalb einer endlichen Grenze, wenn

$$(xx)\leqq 1;\quad (yy)\leqq 1$$

ist. Da man nun durch Integralabschätzung wieder zeigen kann, daß für alle endlichen, aber festen p, q, p_1, q_1 $k_{p,q;p_1,q_1}^{(\varepsilon_1)}$ nach einem bestimmten $k_{p,q;p_1,q_1}$ konvergiert, so folgt wie in Kap. I § 3, daß $K^{(\varepsilon_1)}(xy)$ mit abnehmendem ε_1 nach einer beschränkten Form $K(xy)$ konvergiert.

Die zu $\overline{\varphi}^{(\varepsilon_1)}(\xi,\nu;m,r)$ gehörige normierte Linearform sei:

$$(132)\quad \overline{L}^{(\varepsilon_1)}(x;m,r) = \frac{L^{(\varepsilon_1)}(x;m,r)}{\sqrt{\frac{1}{2}\,|\lg\varepsilon_1|\,\chi_{\varepsilon_1}(m,r)+M_1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\,|\lg\varepsilon_1|\,\chi_{\varepsilon_1}(m,r)+M_1}}\sum_{pq} l_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(m,r)\,x_{p,q}\,.$$

Dann ist:

$$(133)\quad l_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(m,r) = \int_0^a\int_{\varepsilon_1}^d 2E^{(\varepsilon_1)}(\mu;m,r)\,u^{(\varepsilon_1)}(\nu;m,r)\sin\left(\frac{p\pi\xi}{a}\right)\sin\left(\frac{q\pi\nu}{b}\right)\frac{\sqrt{\mu-\nu}\,d\xi\,d\nu}{\sqrt{\nu}\sqrt[4]{(\nu-e_1)(e_4-\nu)(e_5-\nu)}}\,.$$

Es folgt also aus der schon oft angewandten Methode:

$$l_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(m,r)\leqq\frac{M_2^{(\varepsilon_1)}}{q^2\cdot p^{\frac{1}{2}}},$$

wobei $M_2^{(\varepsilon_1)}$ für alle p und q und für alle $A < \mathsf{A}$ und alle ε_1 unterhalb einer festen Grenze bleibt.

Wenn also $\sum_{p,q}|x_{p,q}|$ konvergiert, folgt wie immer:

$$(134)\quad \lim_{\varepsilon_1=0} L^{(\varepsilon_1)}(x;m,r) = L(x;m,r)\,.$$

---

*) Wir können natürlich die Summe wieder als gewöhnliche Doppelsumme, etwa wie in III, auffassen.

Es genügt aber zur Ableitung von (134) schon, wenn

$$x_{p,q} = \frac{M_3}{p^{\frac{1}{2}+c} \cdot q}$$

ist, sofern M_3 unabhängig von p und q unterhalb einer endlichen Grenze liegt, und c eine wesentlich positive Konstante, z. B. die in (123) definierte Zahl c_1, bedeutet.

Nun kann man $K^{(\varepsilon_1)}(xy)$ in der Form darstellen:

$$K^{(\varepsilon_1)}(xy) = \sum_m \sum_r \frac{L^{(\varepsilon_1)}(x; m, r)\, L^{(\varepsilon_1)}(y; m, r)\, 2\pi}{\left(\frac{1}{2} \mid \lg \varepsilon_1 \mid \chi_{\varepsilon_1}(m, r) + M_1\right) A(m, r)} + R_{\mathsf{A}}.$$

Dabei ist die Doppelsumme über alle Eigenfunktionen zu erstrecken, für welche $A \leq \mathsf{A}$ ist; m bedeutet die Oszillationszahl im Intervall $\xi = 0$ bis $\xi = a$; r ist in (117) definiert und man kann A so groß wählen, daß $|R_{\mathsf{A}}| \leq \delta$ wird. Wir können nun, wie in Kapitel I, zur Grenze übergehen und finden

$$(135) \qquad K(xy) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{4\pi\, L(x; m, r)\, L(y; m, r)}{\chi(m, r)\, A(m, r)}\, dr.$$

Wir nehmen ξ_1, η_1 fest im Innern des betreffenden Intervalles an und setzen:

$$x_{p,q}^{(\varepsilon_1)} = k_{p,q}^{(\varepsilon_1)}(\xi_1, \nu_1),$$

dann ist

$$x_{p,q}^{(\varepsilon_1)} \leq \frac{M_4}{p^{\frac{1}{2}+c_2} \cdot q},$$

wobei c_2 die kleinere der beiden Zahlen c_1 und $\frac{1}{2}$ ist.

Um dies einzusehen, ziehen wir von $K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1)$ die Greensche Funktion $G_3(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1)$ ab, welche auf dem Rande des Rechtecks, das von den vier Geraden $\xi = 0$; $\nu = 0$; $\xi = a$; $\nu = d$ begrenzt wird, verschwindet und welche der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2} = 0$$

genügt, nachdem wir sie mit einem konstanten Faktor multipliziert haben, so daß die logarithmische Singularität in Wegfall kommt.

Nun ist aber

$$\frac{1}{p^2 + q^2} \sin\left(\frac{p\pi\xi_1}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi\nu_1}{d}\right) = \int_0^a \int_0^d G_3(\xi_1, \nu_1; \xi, \nu) \sin\left(\frac{p\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi\nu}{d}\right) d\xi\, d\nu.$$

Der übrig bleibende Teil von $K_2^{(\varepsilon_1)}(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1)$ verschwindet für $\xi = 0$

und $\xi = a$ von der 1. Ordnung, ebenso für $\nu = d$; in der Nähe von $\nu = \varepsilon_1$ verhält er sich wie $\nu^{c_1 - \frac{1}{2}} \gamma_2(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$. (Vergl. den Schluß des letzten Paragraphen.) Daraus folgt die Behauptung.

Für y_{p_1, q_1} setzen wir

$$y_{p_1, q_1} = \int_0^a \int_0^d 2 g(\xi, \nu) \sin\left(\frac{p_1 \pi \xi}{a}\right) \sin\left(\frac{q_1 \pi \nu}{d}\right) d\xi \, d\nu ,$$

wobei $g(\xi, \nu)$ eine auf dem Rande des Rechtecks in der $\xi\nu$-Ebene verschwindende, beliebig vorgegebene Funktion ist, welche eine stetige erste und zweite Ableitung in bezug auf ξ und ν besitzen soll, die den Dirichletschen Bedingungen genügen. Setzt man nun $\varepsilon_1 = 0$

$$K_2^{(2)}(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1) = \int_0^a \int_0^d K_2(\xi, \nu; \xi_2, \nu_2) K_2(\xi_1, \nu_1; \xi_2, \nu_2) \, d\xi_2 \, d\nu_2$$

und

$$f_1(\mu, \nu) = \int_0^a \int_0^d K_2^{(2)}(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1) g(\mu_1, \nu_1) \, d\xi_1 \, d\nu_1 ,$$

wobei ξ_1 und μ_1 genau so zusammenhängen wie ξ und μ, so folgt durch dieselben Schlüsse wie in Kapitel I, § 4 aus (135):

$$f_1(\mu, \nu) = \sum_m 2 \cdot \int_0^\infty dr \frac{E(\mu; m, r) \, u(\nu; m, r)}{\chi(m, r)} \frac{\sqrt{\mu - \nu}}{\sqrt[4]{R_1(\nu)}}$$
$$\cdot \int_0^a \int_0^d f_1(\mu_1, \nu_1) E(\mu_1; m, r) \, u(\nu_1; m, r) \frac{\sqrt{\mu_1 - \nu_1}}{\sqrt[4]{R_1(\nu_1)}} \, d\xi_1 \, d\nu_1$$

oder

$$(136) \qquad f(\mu, \nu) = f_1(\mu, \nu) \frac{\sqrt[4]{R_1(\nu)}}{\sqrt{\mu - \nu}} = \sum_m \int_0^\infty dr \frac{E(\mu; m, r) \, u(\nu; m, r)}{\chi(m, r)}$$
$$\cdot \int_0^a \int_0^d f(\mu_1, \nu_1) \, E(\mu_1; m, r) \, u(\nu_1; m, r) (\mu_1 - \nu_1) \, d\xi_1 \frac{d\nu_1}{\sqrt{R_1(\nu_1)}} ,$$

wenn

$$f(\mu, \nu) = \int_0^a \int_0^d \frac{\sqrt[4]{R_1(\nu)}}{\sqrt{\mu - \nu}} K_2(\xi, \nu; \xi_1, \nu_1) \, g_1(\mu_1, \nu_1) \, d\xi_1 \, d\nu_1$$

und

$$g_1(\mu_1, \nu_1) = \int_0^a \int_0^d K_2(\xi_2, \nu_2; \xi_1, \nu_1) \, g(\mu_2, \nu_2) \, d\xi_2 \, d\nu_2$$

ist.